

المعهد العربي للتدريب والبحوث الإحصائية



أساسيات الاحتمالات

إعداد

الاستاذ الدكتور خالد زهدي خواجه

مدير عام

المعهد العربي للتدريب والبحوث الإحصائية

المقدمة

اتسعت استخدامات الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية ، وأصبحت اداة رئيسية وهامة للاقتصادي والاجتماعي والمهندس والطبيب وغيرهم ، ودخلت في كافة العلوم ، وأصبحت تدرس في المدارس والجامعات.

ونظرا لأهمية هذا الموضوع ارتأيت أن أضع بين أيدي طلبتنا الأعزاء هذا المؤلف ، الذي هو مقدمه في الاحتمالات، ولم أشأ أن أتعمق في الموضوع فيصبح للمتخصصين فقط ، واردته ان يكون شرحا مبسطا مع أمثلة تطبيقية وتمارين وحلول لهذه التمارين تسهل على الطالب فهم المادة وترغبه بها ولا تنفره منها. ولهذا اقتصر هذا المؤلف على التعريف بالاحتمالات وقوانينها ، والمتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية وأدلة توصيف هذه التوزيعات (التوقع والتباين والتغاير). والتوزيعات المقطعة والمتصلة مع التركيز على التوزيع الطبيعي ، إضافة إلى مجموعه من التمارين المتنوعة وحلولها.

ارجو أن أكون قد وفقت .

المؤلف

أ.د. خالد زهدي خواجه

الفصل الأول

الفصل الأول

الاحتمالات

PROBABILITIES

■ معنى الاحتمال

لقد تم تعريف الاحتمال بطرق عديدة غير أن أبسطها " هو مقياس
لامكانية وقوع حدث (Event) معين " .

كثيراً ما نستعمل في حياتنا اليومية كلمات يحتمل ويمكن ويجوز ،
فنقول مثلاً من الممكن أو من المحتمل أن تمطر السماء اليوم ، ونعني بهذا أن
الظواهر الطبيعية المحيطة بنا اليوم مشابهة لنفس الظواهر الطبيعية في أوقات
سابقة التي حدث فيها أن أمطرت السماء. كذلك عندما نقول أن احتمال سحب
ورقة "سباتي" من مجموعة واحدة من ورق اللعب عددها (52) ورقة هو $1/4$
فإن ما نعنيه في الحقيقة هو أننا إذا ما سحبنا ورقة واحدة من مجموعة ورق
اللعب عدة مرات فأننا نتوقع أن نحصل على ورقة سباتي في $1/4$ مرات
السحب وذلك لأن عدد أوراق "السباتي" في المجموعة هو 13.
إذن فالاحتمال هو $13/52 = 1/4$.

لقد شهد القرنين السادس عشر والسابع عشر اهتماماً بارزاً بهذا النوع
من الدراسات والبحوث حيث كانت الظروف مواتية لذلك في تلك الفترة إذ أن
ألعاب المقامرة بورق اللعب ورمي حجر النرد كانت منتشرة في قصور
المترفين في أوروبا خاصة في فرنسا، وكانت هذه فترة النهضة العلمية في
أوروبا وخاصة في مجال الرياضيات، وقد شعر المقامرون بحاجتهم إلى أسس
علمية تساعد على حساب فرصهم في الكسب أو الخسارة ، فلجأوا إلى علماء
الرياضيات أمثال بسكال (PASCAL) وفرمات (FERMAT) وبرنولي

(BERNOULLI) وغيرهم وهنا كانت نقطة البدء في الدراسات الجدية في علم الاحتمال.

■ تعاريف :

كي نتمكن من عرض أسس ونظريات علم الاحتمال يلزمنا أولاً تقديم بعض التعاريف التي تستخدم في هذا المجال:

1- الحادث والتجربة والفراغ العيني:

افترض أننا نقوم بإجراء تجربة ما كرمي زهرة النرد مثلاً ونلاحظ كل النتائج الممكنة وهي ظهور أحد الأوجه الستة 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 ونفترض أننا مهتمون بظهور رقم فردي أي 1 أو 3 أو 5 من التجربة . وهكذا فإن عملية رمي الزهرة تسمى تجربة (Experiment) وظهور رقم فردي هو محل اهتمامنا يسمى حادثاً (Event) ومجموعة جميع الحالات الممكنة الظهور تسمى بالفراغ العيني (Sample Space).

ويلاحظ أن الحادث قد يكون حالة او اكثر من الفراغ العيني .

2- الحالات الممكنة (Possible Cases)

هي الحالات أو النتائج المختلفة التي يمكن أن تظهر نتيجة لإجراء تجربة معينة ، فمثلاً عند رمي قطعة عملة تكون نتيجتها صورة أو كتابة ، وعند رمي زهرة نرد تكون نتيجتها 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 فيقال أن عدد الحالات الممكنة 2 في حالة رمي قطعة العملة و 6 في حالة رمي زهرة النرد.

3- الحالات المواتية (Favorable Cases)

هي النتائج او الحالات التي تؤدي إلى تحقيق الحادث الذي هو موضع اهتمامنا ، فإذا كان الحادث هو الحصول على رقم فردي في حالة رمي زهرة النرد فإن الحالات التي تحقق هذا الحادث هي الحصول على 1 أو 3 أو 5 ، هذه الحالات الثلاثة تسمى الحالات المواتية.

4- الحالات المتماثلة (Equally Likely Cases)

إذا كان لدينا عدة كرات معدنية مصنوعة من مادة واحدة متجانسة في الكثافة ولها نفس الوزن والحجم وضعناها في كيس وسحبنا كرة منها بعد خلطها جيداً فإن هذه الكرات تكون حالات متماثلة أي يكون لكل منها نفس النصيب في السحب.

5- الحوادث المتنافية (Mutually Exclusive Events)

يقال عن الحادثين A و B أنهما متنافيان إذا استحال حدوثهما معا . فمثلاً عند رمي حجر النرد لا يمكن الحصول على وجهين في وقت واحد.

6- الحوادث المستقلة (Independent Events)

يعتبر الحادثين A أو B حادثين مستقلين إذا كان وقوع إحداهما أو عدم وقوعه لا يؤثر في وقوع الآخر. فمثلاً عند رمي قطعة عملة واحدة مرتين متتاليتين فإن نتيجة الرمية الثانية لا تتأثر بنتيجة الأولى.

7- الحوادث الشاملة (Exhaustive Events)

تسمى الحوادث A ، B ، C ... حوادث شاملة في تجربة ما إذا كان لابد من حدوث إحداها عند إجراء التجربة.

فمثلاً عند اختيار طالب من الجامعة لمعرفة حالته ما إذا كان مدخناً أو غير مدخن تعتبر هذه الحالات حوادث شاملة لأنه لا بد للفرد أن يكون له صفة واحدة من هذه الصفات. كذلك فإن الحصول على العدد 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 عند رمي حجر النرد تعتبر حوادث شاملة لأنه لا بد من حدوث إحداها.

■ حساب الاحتمال

الاحتمال "هو نسبة عددية غير سالبة محصورة بين الصفر والواحد" حيث تدل القيمة صفر على حالة استحالة الحدث والقيمة واحد على الحادث الأكيد الوقوع. ويمكن حسابه أو تقديره بطريقتين :

- الاحتمال النظري .
- الاحتمال التجريبي .

■ الاحتمال النظري (Theoretical Approach)

يعرف أيضاً بالاحتمال الكلاسيكي ، والاحتمال النظري لحدث حادثة ما هو نسبة عدد الحالات المواتية إلى عدد الحالات الممكنة الحدث على فرض أن كل الحالات لها نصيب متكافئ في الحدث.

مثال 1 :

إذا كان لدينا كيس بداخله 8 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء فما هو احتمال أن نسحب كرة ما لا على التعيين فتكون كرة بيضاء؟

الحل :

عدد الحالات الممكنة = 11

عدد الحالات المواتية = 3

∴ احتمال سحب كرة بيضاء = $\frac{3}{11}$

إذن من أجل حساب احتمال حدوث حادثة ما لابد من معرفة عدد الحالات الممكنة التي لها نصيب متكافئ في الحدث وعدد الحالات المواتية .

مثال 2:

إذا كان هناك (4) أعضاء من مجلس إدارة إحدى الشركات هم (A ، B ، C ، D) مرشحين لاختيار اثنين منهم لتمثيل الشركة في احد المؤتمرات الدولية :

أ. ما هو احتمال اختيار العضو A

ب. ما هو احتمال اختيار أحد العضوين A أو D

ج. ما هو احتمال اختيار العضوين A و D

د. ما هو احتمال عدم اختيار العضو A

الحل: الفراغ العيني S هو مجموعة الحالات الممكنة أي

$$S = \{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$$

أ- عدد الحالات المواتية لاختيار العضو A هو 3 حالات ، عدد الحالات الممكنة 6 حالات.

$$\frac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \text{الاحتمال}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ب- هناك 5 حالات مواتية لاختيار A أو D

$$P(A \text{ or } D) = P(AUD) = \frac{5}{6}$$

ج- هناك حالة واحدة مواتية لاختيار A , D

$$P(A, D) = P(A \cap D) = \frac{1}{6}$$

د- هناك 3 حالات مواتية لعدم اختيار A

$$\therefore P(\bar{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

حيث $P(\bar{A})$ هي احتمال عدم اختيار A

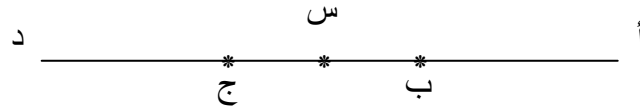
■ عيوب الاحتمال النظري

هناك بعض العيوب أو الصعوبات في تطبيق التعريف النظري للاحتمال

منها:

1- صعوبة حصر عدد الحالات الممكنة

فمثلاً لو كان لدينا المستقيم SP أخذت عليه النقطة س وطلب إلينا حساب احتمال وقوع النقطة س في الجزء ب جـ من المستقيم .



لحساب احتمال وقوع النقطة س في الجزء ب جـ علينا أن نحسب مجموع نقاط الجزء ب جـ وهي التي تمثل عدد الحالات المواتية وأن نحسب مجموع نقاط المستقيم أ د والتي تمثل عدد الحالات الممكنة ، ولكننا نرى أنه من الصعب جداً حساب عدد هذه النقاط وبالتالي من الصعب تطبيق التعريف النظري للاحتمال.

2- عدم تحقيق تماثل الحالات الممكنة

فالتعريف النظري يشترط لتطبيقه تماثل الحالات الممكنة ولكن هذا لا يتحقق دائماً فمثلاً عند اختيار شخص ما لمعرفة حالته الاجتماعية (الزواجيه) وهي أعزب أو متزوج أو مطلق أو أرمل فلا يمكننا القول أن احتمال كونه أرملًا مثلاً يساوي $1/4$ بل ولا يمكن حساب أو تقدير هذا الاحتمال باستخدام التعريف النظري لأنه من الواضح أن هذه الحالات الممكنة غير متماثلة.

كذلك لا نستطيع القول بأن احتمال أن يكون المولود ذكراً يساوي $1/2$ على اعتبار أن الحالات المواتية حالة واحدة وهي كونه ذكراً والحالات الممكنة حالتان (ذكر أو أنثى) وذلك لأنه من المشاهد في جميع أنحاء العالم هو زيادة عدد المواليد الذكور على الإناث. من هنا نشأت الحاجة إلى تعريف آخر للاحتمال يتغلب على مثل هذه الصعوبات هذا التعريف هو الاحتمال التجريبي.

■ الاحتمال التجريبي (Empirical Approach)

إذا رمينا علبة كبريت على شكل متوازي مستطيلات N مرة وكان عدد الرميات التي نتيجتها ظهور الوجه الكبير إلى أعلى n_1 وعدد الرميات التي نتيجتها ظهور الوجه المتوسط n_2 وعدد الرميات التي نتيجتها ظهور الوجه الصغير n_3 فإن

$$\frac{n_1}{N} = \text{نسبة عدد المرات للوجه الكبير}$$

$$\frac{n_2}{N} = \text{نسبة عدد المرات للوجه المتوسط}$$

$$\frac{n_3}{N} = \text{نسبة عدد المرات للوجه الصغير}$$

هذه النسب تختلف عن الـ $\frac{1}{3}$ لعدم تماثل الحالات الممكنة

وكلما كانت N كبيرة كلما اقتربت هذه النسب من الاستقرار عند قيمة ثابتة وقد تكون مثلاً 70% و 20% و 10% على التوالي.

بحيث يمكن القول أن

$$\begin{aligned} \text{وهو احتمال الحصول على الوجه} & \quad \text{Lim } \frac{n_1}{N} = 0.70 \\ \text{الأكبر عند رمي علبة الكبريت} & \quad N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{وهو احتمال الحصول على الوجه} & \quad \text{Lim } \frac{n_2}{N} = 0.20 \\ \text{الأوسط عند رمي علبة الكبريت} & \quad N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{وهو احتمال الحصول على الوجه} & \quad \text{Lim } \frac{n_3}{N} = 0.10 \\ \text{الأصغر عند رمي علبة الكبريت} & \quad N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

كذلك إذا رمينا قطعة عملة n مرة وكان عدد مرات ظهور الوجه

صورة هو r مرة فإن نسبة عدد الصور $= \frac{r}{n}$. هذه النسبة قد تختلف عن $1/2$

إذا كانت n صغيرة ولكن من الثابت أنه كلما زادت n كلما اقتربت النسبة $\frac{r}{n}$

من $1/2$ بحيث أنه عندما تكون n كبيرة جداً تصبح النسبة قريبة جداً من $1/2$

$$\begin{aligned} \text{أي ان} & \quad \text{Lim } \frac{n_1}{N} = 1/2 \\ & \quad N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

وهو احتمال الحصول على صورة عند رمي قطعة النقد.

وعلى ذلك يكون تعريف الاحتمال التجريبي كما يلي:
إذا أجريت تجربة مرات متتالية عددها N وكان عدد
المرات التي يتحقق في كل منها حادث معين هو r مرة
فان احتمال وقوع هذا الحادث يساوي
$$\frac{r}{N}$$

■ قوانين الاحتمالات

- جمع الاحتمالات

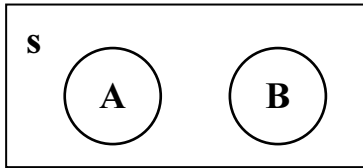
أ- في حالة كون الحوادث متنافية

إذا كانت الحوادث $A_1, A_2, A_3, \dots$ حوادث متنافية بمعنى أن حدوث أحدها يؤدي

إلى استحالة حدوث أي من الحوادث الأخرى وبالتالي فإن احتمال حدوث هذه الحوادث معاً يكون معدوماً فإن

احتمال وقوع أي حادث من الحوادث المتنافية
يساوي مجموع احتمالات وقوع هذه الحوادث

فإذا كان A, B حادثين متنافيين كما في الشكل (1) الشكل (1)



حوادث متنافية

$$P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B)$$

يرمز أيضاً لاحتمال وقوع أحد الحادثين بالرمز

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال 3 : في حالة رمي زهرة نرد ما هو احتمال الحصول على عدد فردي؟

الحل : الحصول على عدد فردي معناه الحصول على 1 أو 3 أو 5 وحيث

أن هذه الحوادث الثلاثة متنافية فإن

$$P(1 \text{ أو } 3 \text{ أو } 5) = P(1) + P(3) + P(5)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

مثال 4:

عند رمي زهرة نرد مرتين ما هو احتمال الحصول على وجهين متشابهين؟

الحل:

الحصول على وجهين متشابهين معناه الحصول على (1 و 1) أو (2 و 2)

أو (3 و 3) ... أو (6 و 6) وهي حوادث متنافية واحتمال كل منها $\frac{1}{36}$

$$P(6 \text{ و } 6) + \dots + P(2 \text{ و } 2) + P(1 \text{ و } 1) = P(\text{وجهين متشابهين})$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \dots + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{6}{36}$$

ومما سبق نجد أن

إذا كان A, B حادثين شاملين ومتنافين فإن

$$P(A) + P(B) = 1$$

إذا كان A, B حادثين شاملين ومتنافين ومتماثلين فإن

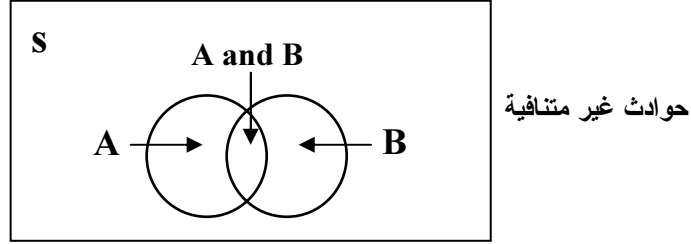
$$P(A) = P(B) = 1/2$$

إذا رمزنا للحادث عدم وقوع A بالرمز $\bar{A}$ فإن الحادثين A و $\bar{A}$ يكونان متنافيين وشاملين ، مثل أن يكون الشخص مدخناً أو غير مدخن

ب- في حالة كون الحوادث غير متنافية

عند عدم اشتراط تنافي الحادثين A و B يكون المقصود بالحادث A (أو B) وقوع A على انفراد أو وقوع B على انفراد أو وقوع الحادثين A و B معا في وقت واحد كما يتضح من الشكل (2) التالي

شكل (2)



الآن $P(A) + P(B)$ تمثل مجموع الحالات المواتية للحادث A مضافاً إليها مجموع الحالات المواتية للحادث B ولكن يجب ملاحظة أن كل من الحالات المواتية للحادث A وتلك المواتية للحادث B تتضمن الحالات المواتية لوقوع A و B معاً ، وبهذا فإنه في حالة جمع $P(A)$ و $P(B)$ فإننا نجمع

$P(A \text{ و } B)$ مرتين ، لهذا لابد من طرح $P(A \text{ و } B)$ مرة واحدة لنحصل على الاحتمال $P(A \text{ أو } B)$ وهذا هو :

$$P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ و } B)$$

أو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال 5 :

بالرجوع إلى مثال أعضاء مجلس إدارة إحدى الشركات، ما هو احتمال أن يتم اختيار العضو A أو العضو D من بين 4 أعضاء من مجلس إدارة إحدى الشركات (هم A و B و C و D) لتمثيلها في أحد المؤتمرات ؟

الحل:

الفراغ العيني وهو مجموع الحالات الممكنة

$$S =$$

$$\{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$$

- الحالات المواتية لاختيار A هي (AB, AC, AD)

- الحالات المواتية لاختيار D هي (AD, BD, CD)

- الحالات المواتية لاختيار A و D معاً هي (AD)

حسب قاعدة جمع الاحتمالات نحصل على النتيجة التي حصلنا عليها سابقاً.

$$P(A \cup D) = P(A \text{ أو } D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) =$$

$$\frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6}$$

مثال 6:

إذا سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب فما هو احتمال أن تكون الورقة عدداً أو من مجموعة معينة من المجموعات الأربعة المكونة لأوراق اللعب؟

الحل:

نفرض أن A يمثل الحصول على عدد وأن B يمثل الحصول على ورقة من مجموعة معينة ولتكن "الديناري"

$$P(A) = \frac{40}{52}$$

$$P(B) = \frac{13}{52}$$

$$P(A \cap B) = \frac{10}{52}$$

ومن قانون جمع الاحتمالات

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{40}{52} + \frac{13}{52} - \frac{10}{52} \\ &= \frac{43}{52} \end{aligned}$$

■ ضرب الاحتمالات

أن احتمال حدوث حادثين مستقلين أو أكثر معاً يساوي حاصل ضرب احتمال حدوث كل واحد من هذه الحوادث ببعضها بعضاً

إذا كان لدينا الحادثين المستقلين A و B فإن

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

مثال 7 :

ما هو احتمال الحصول على الوجه (3 ، 3) عند رمي زوج من أحجار النرد؟

الحل:

أن احتمال الحصول على الوجه 3 لدى رمي الحجر الأول من النرد هو $\frac{1}{6}$

وكذلك احتمال لحصول على الوجه 3 لدى رمي الحجر الثاني من النرد هو $\frac{1}{6}$

$$P(A \cap B) =$$

$$P(A) P(B) =$$

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

■ الاحتمال الشرطي Conditional Probability

يهتم مدراء الشركات حين اتخاذ العديد من القرارات الإدارية أو التجارية بمعرفة احتمال حدوث حدث معين A إذا كان حدثاً آخر B قد حدث، فمثلاً حين يكون مطلوباً من المدير أن يتخذ قراراً بنشر إعلان دعائي لسلعة ما في التلفزيون فإنه يكون مهتماً بمعرفة ما هو احتمال أن شخصاً ما سيشتري السلعة (الحدث A) إذا كان قد حصل أن شاهد الإعلان في التلفزيون (الحدث B).

وهكذا فإن احتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B يدعى بالاحتمال الشرطي ويكتب على صورة $P(A/B)$ وتقرأ احتمال الحدث A بعد وقوع الحدث B.

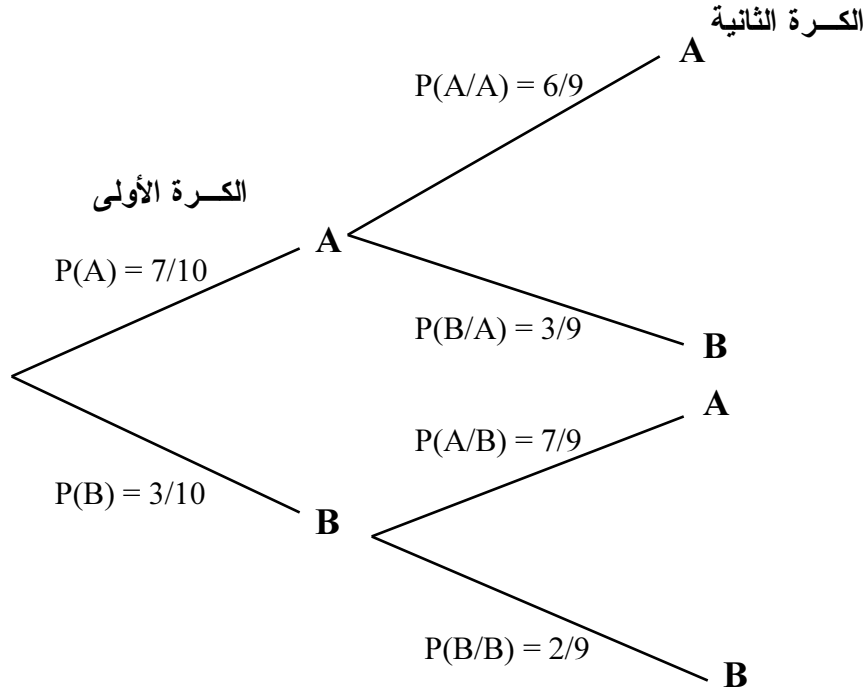
سنوضح مفهوم الاحتمال الشرطي بمساعدة المثال التالي:

مثال 8 :

كيس يحتوي على 3 كرات سوداء و 7 كرات بيضاء
لنفرض أننا سحبنا منه كرتين كل على حده وبدون إعادة . فإذا رمزنا إلى سحب
كرة بيضاء بالرمز A وإلى سحب كرة سوداء بالرمز B فإن الحالات المركبة
التي نحصل عليها تتمثل بما يلي:

AA	الكرتان بيضاوان	-
AB	الأولى بيضاء والثانية بيضاء	-
BA	الأولى سوداء والثانية بيضاء	-
BB	الكرتان سوداوان	-

احتمالات النتائج لسحب الكرة الأولى ثم الثانية بالترتيب يمكن إيضاحها بالرسم
التالي:



وهكذا فإن الاحتمال المركب يمكن حسابه كما يلي:

احتمال ان تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية بيضاء = احتمال أن تكون الأولى بيضاء مضروباً في احتمال أن تكون الثانية بيضاء بشرط أن تكون الأولى بيضاء.

$$\begin{aligned} P(A \cap A) &= P(A, A) = P(A) P(A/A) \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{42}{90} \end{aligned}$$

وبالمثل

$$P(A \cap B) = P(A) P(B/A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{21}{90}$$

$$P(B \cap A) = P(B) P(A/B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{21}{90}$$

$$P(B \cap B) = P(B) P(B/B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90}$$

والآن نعمم هذا المثال ونقدم التعريف التالي للاحتمال الشرطي:

- الاحتمال الشرطي

إذا كان لدينا الحادتين A , B وكان $P(B) \neq 0$ لا يساوي الصفر فإن الاحتمال الشرطي للحادث A بشرط وقوع الحادث B يعطى بالمعادلة التالية:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

أي أن الاحتمال الشرطي للحادث A بشرط وقوع الحادث B يساوي حاصل قسمة الاحتمال المركب لـ A , B على احتمال الحادث B

من الاحتمال الشرطي أعلاه يمكننا أن نستنتج الاحتمال المركب $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A) P(B/A)$$

$$= P(B) P(A/B)$$

ويمكننا أن نعمم هذه الصيغة لأكثر من حادثين ففي حالة 3 حوادث تكون

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B/A) P(C/AB)$$

مثال 9 :

كيس يحتوي على 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء سحبته منه 3 كرات بدون إعادة ما هو احتمال أن تكون كلها بيضاء؟

الحل :

ليكن A_1 هو الحصول على كرة بيضاء في السحب الأولى

A_2 هو الحصول على كرة بيضاء في السحب الثاني

A_3 هو الحصول على كرة بيضاء في السحب الثالث

وبالتطبيق المباشر للقانون

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 A_2)$$

$$= \left(\frac{7}{10}\right) \left(\frac{6}{9}\right) \left(\frac{5}{8}\right)$$

$$= \frac{210}{720}$$

مثال 10 :

سحبت ورقتان من مجموعة أوراق اللعب بدون إعادة ما هو احتمال أن تكون عشرين؟

الحل :

ليكن A هو الحصول على العدد 10 في الورقة الأولى
B هو الحصول على العدد 10 في الورقة الثانية

$$P(AB) = P(A) P(B/A) \\ = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51}$$

■ العمليات العشوائية المنتهية والأشجار البيانية

يقصد بالعملية العشوائية المنتهية : التجارب المتتالية بحيث يكون لكل تجربه عدد منته من النواتج باحتمالات معطاة

ومن الطرق المناسبة لوصف مثل هذه العمليات ولحساب احتمالات أي حدث ، طريقة الأشجار البيانية الموضحة في المثال التالي:

مثال 11 :

لدينا ثلاثة أدراج كما يلي:

- بالدرج I يوجد 6 أشرطة فيديو من بينها 2 أجنبيان .
- بالدرج II يوجد 8 أشرطة فيديو من بينها 3 أجنبية.
- بالدرج III يوجد 4 أشرطة فيديو من بينها 1 أجنبي.

اختير درجا بطريقة عشوائية وسحب منه شريطاً بطريقة عشوائية أيضاً. فما هو الاحتمال (P) أن يكون الشريط عربياً.

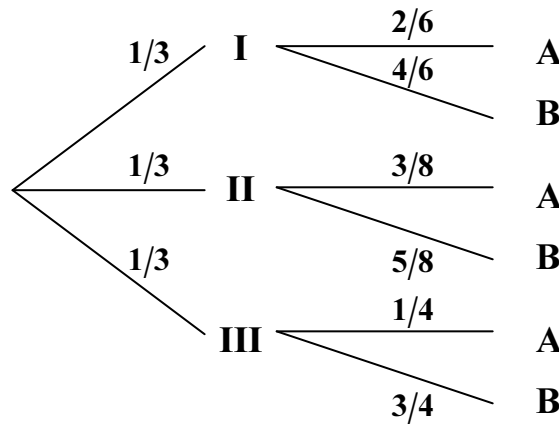
الحل:

في هذا المثال العملية العشوائية متتابعة من تجربتين

(i) نختار درجا من الثلاثة أدراج .

(ii) نختار شريطاً ويحتمل أن يكون أجنبياً (A) أو عربياً (B) .

تمثل الشجرة البيانية التالية هذه العملية وتعطي الاحتمال لكل فرع أو مسار للشجرة:



يكون احتمال حدوث أي مسار من المسارات الستة مساوياً لحاصل ضرب الاحتمالات لكل فرع في هذا المسار. فمثلاً اختيار الدرج II ثم اختيار شريطاً أجنبياً هو $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{8}\right)$.

وحيث أنه توجد ثلاثة مسارات متنافية تؤدي إلى شريط عربي يكون مجموع احتمالات هذه المسارات الثلاثة هو الاحتمال المطلوب (أي احتمال الحصول على شريط عربي):

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{4}{6} + \frac{5}{8} + \frac{3}{4} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{49}{24} \right) = \frac{49}{72}
 \end{aligned}$$

▪ نظرية بيز (Bayes' Theorem)

لو افترضنا أن لدينا صندوقين بداخلها مفردات سليمة ومعيبة. مفردة معيبة سحب عشوائياً من أحد الصندوقين دون تعيين، ونحب أن نعرف ما هو احتمال أن تكون هذه المفردة المعيبة قد سحبت من الصندوق الأول. للإجابة على أسئلة من هذا النوع نستخدم قاعدة أو نظرية بيز والتي يمكن اعتبارها تطبيقاً لاحتمال الشرطي.

تهدف نظرية بيز إلى حساب احتمالات صحة الفروض بناء على معلومات ميدانية أو تجريبية. في الغالب يكون لدى رجل الأعمال معلومات إضافية عن حادث معين أو مسألة معينة ، إما من خلال خبرته الشخصية أو من خلال ماضي هذا الحادث أو المسألة. الاحتمالات التي تعتمد على الخبرة الشخصية وقبل الحصول على نتائج التجربة تدعى بالاحتمال القبلي Prior Probability فمثلاً الاحتمالات المعتمدة على سجلات المبيعات السابقة أو على الرقم السابق لكمية الإنتاج غير السليم تعتبر أمثلة للاحتمال القبلي. أما عندما يحسب الاحتمال على ضوء معلومات ميدانية مكتسبة يسمى بالاحتمال البعدي . Posterior Probability

فمثلاً عند دراسة حجم الأسرة الشائع قد يكون في ذهننا عدة

فروض خاصة بهذا الحجم ، هذه الفروض هي:

1	A1	أن يكون حجم الأسرة الشائع
2	A2	أن يكون حجم الأسرة الشائع
3	A3	أن يكون حجم الأسرة الشائع
-	-	-
-	-	-
-	-	-
10	A10	-

وهذه الحالات تمثل مجموعة شاملة ومتنافية.

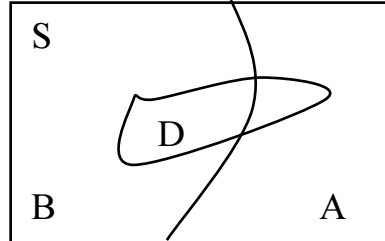
إذا جمعت بيانات ميدانية B عن هذه الظاهرة واستطعنا أن نحسب $P(A/B)$ فإن هذا الاحتمال يسمى بعديا. مع أن قاعدة بيز يمكن استخدامها لأكثر من حادثين شاملين ومتنافيين إلا أننا ومن أجل التبسيط سنتعرض لتطبيق النظرية على حادثين شاملين ومتنافيين فقط.

- نظرية بيز

إذا كان A و B حادثين شاملين ومتنافيين في الفراغ العيني S
و D أي حادث في نفس الفراغ بحيث $P(D) \neq 0$ فإن

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(A \cap D) + P(B \cap D)}$$

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(A \cap D) + P(B \cap D)}$$



مثال 12 :

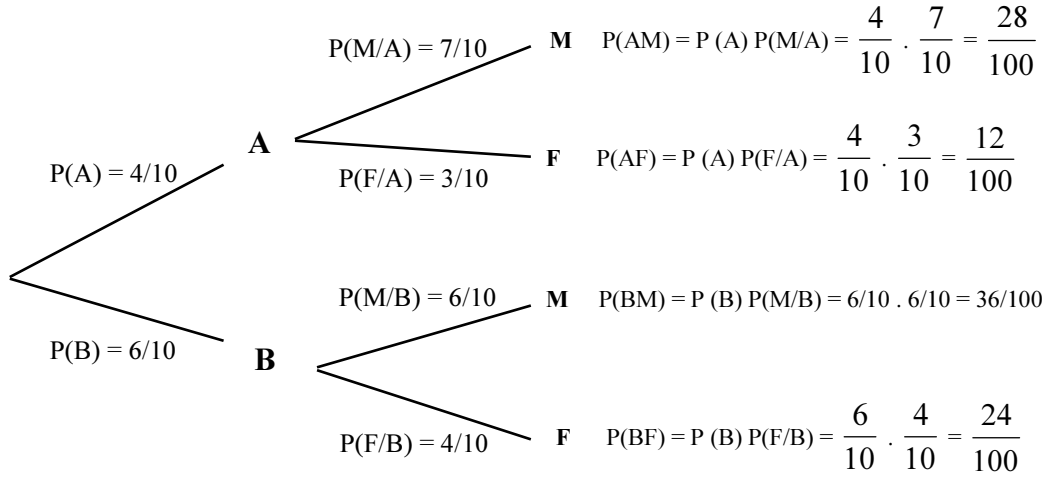
إذا كان 0.40 من المدخنين في مدينة ما يفضلون نوع السجائر A والباقيين منهم يفضلون النوع B وإذا كن النساء يمثلن 0.30 من بين الذين يفضلون A و 0.40 من بين الذين يفضلون B. فإذا اخترنا بطريقة عشوائية أحد المدخنين وكانت امرأة فما هو احتمال أن تكون ممن يفضلون النوع A؟

الحل :

لنفرض أن الاحتمالات هي:

احتمال أن المدخن يفضل النوع A	$P(A)$
احتمال أن المدخن يفضل النوع B	$P(B)$
احتمال أن يكون المدخن رجلاً بشرط أن النوع A هو المفضل	$P(M/A)$
احتمال أن يكون المدخن رجلاً بشرط أن النوع B هو المفضل	$P(M/B)$
احتمال أن يكون المدخن امرأة بشرط أن النوع A هو المفضل	$P(F/A)$
احتمال أن يكون المدخن امرأة بشرط أن النوع B هو المفضل	$P(F/B)$

احتمالات الحالات الممكنة يوضحها الشكل التالي:



وباستخدام قاعدة بيز

$$P(A/F) = \frac{P(AF)}{P(AF) + P(BF)} = \frac{12/100}{12/100 + 24/100} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

ويمكننا أن نمثل كل هذه الاحتمالات بالجدول التالي:

الاحتمال البعدي	الاحتمال المركب	الاحتمال الشرطي	الاحتمال القبلي	الحادث
$\frac{12}{36}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	A
$\frac{24}{36}$	$\frac{24}{100}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	B
1.0	$\frac{36}{100}$		1.0	المجموع

■ التجارب المتكررة Repeated Trials

سندرس في هذا القسم كيفية حساب احتمالات الحصول على النتائج المختلفة التي يمكن أن تترتب على تكرار تجربة معينة عدداً معيناً من المرات تحت نفس الظروف أو تحت ظروف مختلفة.

أولاً: التجارب المتكررة المستقلة ذات الاحتمال الثابت

مثلاً عند إلقاء قطعة نقد N مرة وكنا معنيين بظهور الوجه صورة فأنا نلاحظ بأن هناك نتائج مختلفة لعدد مرات ظهور الوجه صورة، فقد نحصل على (N صورة وصفر كتابة) أو (N-1 صورة ومرة واحدة كتابة) أو (N-2 صورة ومرتين كتابة) أو ... أو (صفر صورة و N كتابة) أي أن هناك

$N+1$ حالة ممكنة . فمثلاً لو ألقينا قطعة النقد خمس مرات فإن الحالات الممكنة هي:

5 صورة	و	صفر كتابة
4 صور	و	كتابة واحدة
3 صور	و	كتابتان
2 صور	و	3 كتابة
1 صورة	و	4 كتابة
صفر صورة	و	5 كتابة

أي أن مجموع الحالات الممكنة ست حالات

ولحساب مثل هذه الاحتمالات في التجارب المتكررة المستقلة ذات الاحتمال الثابت نستخدم القانون الاحتمالي ثنائي الحدين.

■ القانون الاحتمالي ثنائي الحدين Binomial Probability Law

ولتوضيح كيفية التوصل إلى هذا القانون نجري الآتي:

احتمال ظهور الصورة على قطعة واحدة = $\frac{1}{2}$

احتمال ظهور الصورة على 3 قطع معاً أو برمية قطعة واحدة ثلاث مرات هو

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

فإذا رمينا خمس قطع نقود أو قطعة واحدة خمس مرات يكون احتمال ظهور الصورة على ثلاث قطع منها يعني في الوقت نفسه عدم ظهورها على القطعتين الباقيتين أي $\left(\frac{1}{2}\right)^2$. وبذلك يكون احتمال ظهور الصورة على ثلاث قطع وعدم ظهورها على القطعتين الباقيتين معاً في نفس الوقت =

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

لكن هذه هي نتيجة ظهور الصورة في الثلاث رميات الأولى وعدم ظهورها في المرتين الباقيتين ولكننا نريد حساب احتمال ظهور الصورة في أي ثلاث قطع وعدم ظهورها في أي قطعتين بغض النظر عن ترتيب القطع ومن الواضح أن الاحتمال المطلوب أكبر من الاحتمال السابق أي أن احتمال ظهور الصورة على أي ثلاث قطع أكبر من احتمال ظهورها على ثلاث قطع محددة . وللحصول على الاحتمال المطلوب نستخدم التوافيق ونحسب عدد المجموعات التي يمكن تكوينها من خمس قطع بحيث تتكون كل مجموعة من ثلاث قطع فقط، أي نحسب عدد التوافيق التي يمكن تكوينها من خمس قطع بحيث تتكون كل توفيق من ثلاث قطع أي C_3^5 والاحتمال الذي حسبناه أعلاه يكون صحيحاً لكل توفيقه أو مجموعة من هذه التوافيق الثلاث أي الاحتمال ثابت ويتكرر في كل مجموعة ولذلك نضرب عدد التوافيق في الاحتمال المحسوب فنحصل على

$$\begin{aligned} C_3^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ = \frac{10}{32} \end{aligned}$$

والآن نستطيع أن نعمم فنقول أنه في حالة تجربة معينة نتيجتها وقوع حادث ما أو عدم وقوعه وكان احتمال وقوع هذا الحادث (P) واحتمال عدم وقوعه (1-P) وكررنا هذه التجربة (n) مرة فإن احتمال وقوع هذا الحادث في (r) مرة حيث $(n > r > 0)$ يكون =

$$C_r^n p^r (1-p)^{n-r}$$

وهذا ما يعرف باسم القانون الاحتمالي ثنائي الحدين وكما ذكرنا فهو يستخدم في الحالات المستقلة ذات الاحتمال الثابت، فاحتمال وقوع الصورة أو عدم وقوعها

$$\text{ثابت في كل رمية} = \frac{1}{2}$$

مثال (13): بالعودة إلى مثالنا السابق وهو رمي قطعة نقد خمس مرات
 أو رمي خمس قطع مرة واحدة فإن الاحتمالات الخاصة بظهور
 الوجه يمكن حسابها باستخدام هذا القانون كما يلي:

احتمال ظهور الصورة 5 مرات =

$$C_5^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

احتمال ظهور الصورة 4 مرات =

$$C_4^5 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$$

احتمال ظهور الصورة 3 مرات =

$$C_3^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32}$$

احتمال ظهور الصورة مرتين =

$$C_2^5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32}$$

احتمال ظهور الصورة مرة واحدة =

$$C_1^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$$

احتمال عدم ظهور الصورة =

$$C_0^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

نلاحظ أن هذه النتائج هي الحدود المتتالية في مفكوك المقدار ثنائي الحدين

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^5$$

نتيجة لما كان عدد مرات وقوع الحادث في التجارب المتكررة التي عددها n قد تأخذ القيم صفر أو 1 أو 2 أو ... أو n وهي حالات شاملة ومتنافية فإن

$$P(0) + P(1) + P(2) + \dots + P(n) = 1$$

مثال 14 :

أحصر الحالات الممكنة لظهور الوجبة 3 وأحسب احتمالاتها عند رمي حجر النرد 3 مرات.

الحل: الحالات الممكنة

- عدم ظهور الوجه 3 بتاتا

- ظهوره مرة واحدة

- ظهوره مرتين

- ظهوره ثلاث مرات

- احتمال عدم ظهور الوجه 3 بتاتا =

$$= {}^3C_0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

- احتمال ظهوره مرة واحدة =

$$= {}^3C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 3 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{25}{36}\right) = \frac{75}{216}$$

- احتمال ظهوره مرتين =

$$C_2^3 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}$$

- احتمال ظهوره ثلاث مرات =

$$C_3^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}$$

نلاحظ أن مجموع الاحتمالات = واحد وذلك لأن هذه الحالات شاملة ومتنافية
كما نلاحظ أن هذه النتائج هي الحدود المتتالية في مفكوك المقدار ثنائي الحدين

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right)^3$$

ثانياً : التجارب المتكررة غير المستقلة

في الجزء السابق درسنا الاحتمالات في حالة التجارب المتكررة تحت نفس الظروف أي في الحالات المستقلة ذات الاحتمال الثابت وفي هذا الجزء سندرس الاحتمالات في حالة التجارب المتكررة والتي يتغير فيها احتمال وقوع الحادث من تجربة إلى أخرى، في مثل هذه الحالات نستخدم القانون الهابيرجيومتري .

■ القانون الهابيرجيومتري Hypergeometric Low

يمكننا أن نوضح هذا القانون بالمثال التالي:

مثال 15 :

لو أخذنا كيس بداخله N كرة متماثلة من جميع الوجوه عدا اللون هي :
 n_1 كرة بيضاء و n_2 كرة حمراء و n_3 كرة سوداء وسحبنا كرات عددها R

بدون إعادة والمطلوب حساب احتمال أن يكون من بين الكرات المسحوبة r_1 كرة بيضاء و r_2 كرة حمراء و r_3 كرة سوداء.

الحل:

يتم اختيار R كرة من الكيس بطرق عددها $\binom{N}{R}$ وهو عدد الحالات الممكنة ، يتم الحادث بسحب r_1 كرة بيضاء من الكرات البيضاء الـ n_1 وهذا يتم بطرق عددها $\binom{n_1}{r_1}$ وسحب r_2 كرة حمراء من الكرات الحمراء الـ n_2 وهذا يتم بطرق عددها $\binom{n_2}{r_2}$ وسحب r_3 كرة سوداء من الكرات السوداء n_3 وهذا يتم بطرق عددها $\binom{n_3}{r_3}$ أي أن الحادث يتم بطرق عددها

$$\left(\binom{n_1}{r_1}\right)\left(\binom{n_2}{r_2}\right)\left(\binom{n_3}{r_3}\right)$$

وهذا هو عدد الحالات المواتية

$$\frac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \text{وبالتالي يكون الاحتمال}$$

$$\frac{\binom{n_1}{r_1} \binom{n_2}{r_2} \binom{n_3}{r_3}}{\binom{N}{R}}$$

حيث

$$R = r_1 + r_2 + r_3$$

$$= n_1 + n_2 + n_3$$

ويمكننا أن نعمم النتيجة فنقول :

إذا كان لدينا كيس بداخله N كرة متماثلة منها n_1 كرة من اللون الأول

و n_2 كرة من اللون الثاني و ... و n_z كرة من اللون Z وسحبنا دون إعادة R

كرة فإن احتمال أن يكون من بين الكرات المسحوبة r_1 كرة من اللون الأول و r_2 من اللون الثاني و ... و r_z من اللون z هو :

$$\frac{\binom{n_1}{r_1} \binom{n_2}{r_2} \dots \binom{n_z}{r_z}}{\binom{N}{R}}$$

وهذه الصيغة تدعى بالقانون الاحتمالي الهايبرجيومتري

مثال 16:

قاعة فيها 10 طلاب و 5 طالبات أخذت عينه عشوائية حجمها 20%

فما هو احتمال:

(i) أن تتكون من طالبين وطالبة.

(ii) أن تحتوي على طالبات.

الحل:

(i) بتطبيق القانون الهايبرجيومتري يكون احتمال طالبين وطالبة =

$$\frac{\binom{10}{2} \binom{5}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{225}{455}$$

(ii) احتمال أن تحتوي على طالبات يعني أن تحتوي على طالبة على الأقل وهذا يساوي واحد ناقص احتمال أن يكونوا جميعاً من الطلاب

$$= 1 - \frac{\binom{10}{3} \binom{5}{0}}{\binom{15}{3}} = \frac{335}{455}$$

أو هو احتمال أن تحتوي على طالبة أو طالبتين أو ثلاث طالبات

$$\frac{\binom{5}{1} \binom{10}{2} + \binom{5}{2} \binom{10}{1} + \binom{5}{3} \binom{10}{0}}{\binom{15}{3}} = \frac{335}{455}$$

■ التوقع الرياضي واستخداماته الاقتصادية Expectation

التوقع الرياضي هو وسيلة الغرض منها ربط نظرية الاحتمالات بالمسائل المالية ، فإذا افترضنا أن P ترمز إلى احتمال نجاح شخص في مغامرة ما و X ترمز إلى قيمة المبلغ الذي يحصل عليه عند نجاحه فإن حاصل ضرب $P.X$ يسمى بتوقع الشخص أو أمله من هذه المغامرة.

$$\therefore \text{التوقع} = \text{مقدار الرهان} \times \text{احتمال الكسب}$$

ونرمز للتوقع بالرمز E

$$E = P.X$$

هذا وإذا كان المبلغ X يستحق الدفع بعد n من الزمن وكانت i هي معدل الفائدة فإن القيمة الحالية للتوقع =

$$P.X (1+i)^{-n} = \frac{P.X}{(1+i)^n}$$

مثال 17 :

في لعبة من ألعاب الرهان يربح اللاعب 5 دنانير إذا سحب ورقة واحدة من مجموعة أوراق اللعب (52 ورقة) وكانت الورقة المسحوبة من النوع "سباتي" فما هو الثمن العادل الذي يجب دفعه لقاء كل عملية سحب؟

الحل:

$$\text{احتمال الربح} = \text{احتمال سحب ورقة "سباتي"} = \frac{1}{4}$$

فإذا ضربنا هذا الاحتمال بقيمة الجائزة أمكننا الحصول على قيمة التوقع وهو الثمن العادل لكل سحبه

$$E = P.X.$$

$$= \frac{1}{4}(5) = 1.25$$

أي أن السعر العادل لكل سحبه يساوي دينار وربع الدينار.

مثال 18:

كم يبلغ التوقع الرياضي (أي مقدار الرهان) المنتظر أن يدفعه لاعب يرغب في كسب رهان قدره 100 دينار إذا كان احتمال الكسب 0.40 ؟

الحل: التوقع الرياضي = $E = P.X. = \frac{40}{100} \times 100 = 40$

مثال 19:

وبفرض أن قيمة الرهان المذكور في المثال السابق تستحق الدفع بعد 5 سنوات وكان سعر الفائدة 3.5% فإن القيمة الحالية للتوقع الرياضي =

$$\begin{aligned} E &= \frac{P.X}{(1+i)^n} \\ &= \frac{40}{(1.035)^5} \\ &= \frac{40}{1.1876862} \\ &= 33.6789 = 33.7 \end{aligned}$$

ومعنى هذا انه إذا استمرت الجهة التي تعهدت بدفع قيمة الرهان إلى الفائزين بتحصيل الاشتراكات السنوية من اللاعبين وقدر كل منها 33.7 ديناراً ولمدة خمس سنوات فإن جملة هذه الاشتراكات (بواقع فائدة سنوية مركبة 3.5%) تكون كافية لدفع مبلغ قيمة الرهان وهي 100 دينار لكل فائز بعد 5 سنوات.

■ علاقة التوقع بالتأمين على الحياة

لما كانت قيمة شراء التوقع الرياضي هي المبلغ الذي يجوز المغامرة به في كل محاولة لكسب مبلغ متوقع هو قيمة الرهان فإن فكرة التوقع الرياضي هذه تعتبر أساس فكرة التأمين على الحياة إذ أن شركات التأمين تتعهد بدفع قيمة الرهان (المبلغ المؤمن عليه) للاعبين (المؤمنين) الذين يقومون بدفع القيمة الحالية للتوقع الرياضي لها بغرض التأمين لديها.

مثال 20: ما هي القيمة الحالية للتوقع الرياضي على أساس الفائدة المركبة بمعدل 3.5% سنوياً التي يسدها شخص في سن العشرين لشركة تأمين تعهدت بأن تدفع له مبلغ 2000 دينار إذا بلغ سن الأربعين؟

الحل: أن قيمة احتمال البقاء على قيد الحياة يمكن أخذها أو حسابها من جداول الحياة التي تعرف باسم "جداول الخبرة الأمريكية للحياة" وهي جداول 7 ، 8 ، 9 من الجداول المالية التي طبعت في أميركا عام 1867 ولا يزال العمل بها جارياً حتى الآن وهي محسوبة لدفعة نظرية عددها 100000 شخص.

احتمال البقاء على قيد الحياة =

$$P = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

حيث l_x هي عدد الباقيين على قيد الحياة عند العمر x

l_{x+n} هي عدد الباقيين على قيد الحياة عند العمر $x + n$

من جداول الحياة الأميركي رقم 7

$$P = \frac{l_{40}}{l_{20}} = \frac{78106}{92637} = 0.84314$$

القيمة الحالية للتوقع الرياضي هي

$$\frac{P.X}{(1+i)^n} = \frac{0.84314 \times 2000}{(1.035)^{20}} = \frac{1686.28}{1.9897877} = 847.467$$

ومعنى هذا أن على كل شخص في سن العشرين من المؤمنين على حياتهم أن يدفع إلى شركة التأمين اشتراكاً وقسطاً سنوياً قيمته 847.467 دينار مقابل تعهدها بأن تدفع له مبلغ 2000 دينار إذا بلغ سن الأربعين . وذلك لأن الشركة باستثمارها هذه الاشتراكات أو الأقساط بسعر 3.5% سنوياً لمدة 20 سنة فإنه سيكون لديها رأسمال يكفي لدفع مبلغ 2000 دينار لكل من يظل حياً من المشتركين حتى سن الأربعين.

■ علاقة التوقع باختيار الاستثمارات

ان تطبيق قاعدة التوقع في اختيار الاستثمارات تقوم على أساس حساب القيم الحالية للدخول المتوقعة ثم بعد ذلك تقوم بطرح المبالغ المستثمرة من مجموع القيم الحالية للدخول المتوقعة وحساب التوقع للنتائج.

مثال 21: يود شخص في استثمار مبلغ 1000 دينار في أحد المشاريع الصناعية التي يقدر لها عمراً استثمارياً قدره سنتان حيث أن احتمالات الربح أو الخسارة في كل من السنتين هي كما يلي:

السنة الأولى 1- احتمال عدم الحصول على أي مردود هو $\frac{1}{2}$

2- احتمال الحصول على مردود قدره (1050) دينار هو $\frac{1}{2}$

السنة الثانية 1- احتمال عدم الحصول على أي مردود هو $\frac{2}{5}$

2- احتمال الحصول على مردود قدره (1102.5) دينار

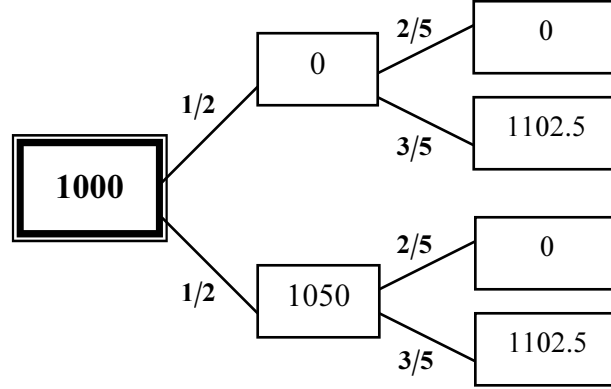
$$\frac{3}{5} \text{ هو}$$

فإذا علمنا أن معدل الفائدة المعمول به في الأسواق المالية هو 5% فهل

ينصح هذا الشخص بإجراء الاستثمار أم لا؟

الحل: لاتخاذ قرار حول إجراء الاستثمار أو عدم إجرائه علينا أولاً أن نقوم

بتمثيل المشكلة بيانياً كما يلي:



وبعد ذلك نقوم بحساب القيم الحالية للدخل المتوقع الحصول عليه وحسب

مختلف الاحتمالات ومن ثم نطرح منها قيمة المبلغ المستثمر وذلك كما يلي:

$$1. \quad 0 - 1000 = -1000$$

$$2. \quad \frac{1102.5}{(1.05)^2} - 1000 = 0$$

$$3. \quad \frac{1050}{1.05} - 1000 = 0$$

$$4. \quad \frac{1102.5}{(1.05)^2} + \frac{1050}{1.05} - 1000 = 1000$$

وبعد ذلك نقوم بحساب الاحتمالات وذلك كما يلي:

$$\text{الاحتمال الأول} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{10}$$

$$\text{الاحتمال الثاني} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$\text{الاحتمال الثالث} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{10}$$

$$\text{الاحتمال الرابع} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{3}{10}$$

بعد أن قمنا بحساب القيم الحالية لمختلف الدخول المتوقعة والاحتمالات

المقابلة لها فإنه يمكننا حساب التوقع أي الدخل المتوقع وذلك كما يلي:

التوقع	الاحتمال	القيمة الحالية للدخل	
-200	2/10	-1000	0
0	3/10	0	1102.5
0	2/10	0	0
300	3/10	1000	1102.5
100			

بما أن قيمة التوقع للدخل المتوقع الحصول عليه موجب وتعاادل 100 وحدة نقدية إذا فأئنا ننصح هذا الشخص بإجراء الاستثمار.

تمارين

الفصل الأول

1. سحبت ورقتان من مجموعة أوراق اللعب (52 ورقة) بحيث تعاد الورقة الأولى قبل سحب الثانية. أحسب الاحتمالات الآتية:

أ. أن تكون الورقتان المسحوبتان من اللون الأسود $\left(\frac{1}{4}\right)$

ب. أن تكون الورقتان المسحوبتان من شكل معين (ديناري) $\left(\frac{1}{16}\right)$

ج. أن تكون الورقتان المسحوبتان من نفس الشكل $\left(\frac{1}{4}\right)$

2. لدينا ثلاثة أزواج من الأشخاص المتزوجين . اخترنا من كل زوج فرداً واحداً بدون تحيز فما هو احتمال :

أ. أن يكون الأفراد الثلاثة المختارون من جنس واحد $\left(\frac{1}{4}\right)$

ب. أن يكونوا رجلين وامرأة $\left(\frac{3}{8}\right)$

3. رميت قطعة نقود خمس مرات أحصر النتائج الممكنة ، وأحسب احتمال كل منها.

4. ما هو احتمال ظهور ثلاثة صور في رمية واحدة لثلاثة قطع من النقود؟ $\left(\frac{1}{8}\right)$

5. يقوم شخص برمي قطعة نقود فإذا حصل على صورة وضع ثلاث كرات سوداء في صندوق أما إذا حصل على كتابة فإنه يضع كرتين سوداء وكرة بيضاء. فإذا كرر الشخص هذه العملية n مرة ثم سحب كرة من الصندوق. فاحسب احتمال أن تكون هذه الكرة بيضاء $\left(\frac{1}{6}\right)$

6. كيسان الأول به 5 كرات متماثلة منها ثلاث كرات حمراء وكرتان بيضاوان والثاني به 7 كرات منها ثلاث كرات حمراء وأربع كرات بيضاء. سحب كرة من كل كيس فما هو احتمال أن تكون واحدة منهما على الأقل بيضاء؟ $(26/35)$

7. كيس يحتوي على 3 كرات بيضاء و 6 كرات حمراء و 3 كرات سوداء من حجم واحد سحب 3 كرات عشوائياً وبدون إعادة ، فما هو احتمال أنها ستكون من لون واحد؟ $(1/10)$

8. كيس به 12 كرة متماثلة منها 5 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء و 4 كرات سوداء سحب 3 كرات من الكيس أحسب الاحتمالات الآتية:

أ. احتمال عدم ظهور كرات حمراء $(21/55)$

ب. احتمال ظهور كرة واحدة حمراء $(27/55)$

ج. احتمال أن تكون كرة واحدة حمراء على الأقل $(34/55)$

د. احتمال أن تكون الكرات كلها من لون واحد $(3/44)$

هـ. احتمال أنه ليس هناك كرتان أو أكثر من لون واحد $(3/11)$

9. بيع في أحد الحفلات 100 بطاقة بسعر دينار واحد للبطاقة الواحدة، وخصصت جائزة قدرها 50 دينار للبطاقة الفائزة فهل كان سعر البطاقة عادلاً أم لا؟

10. كيس به 100 كرة متماثلة عدا اللون منها 45 كرة بيضاء و 30 كرة حمراء و 25 كرة سوداء سحب كرة وسجل لونها وأعيدت إلى الكيس ثم سحب كرة ثانية وسجل لونها وأعيدت إلى الكيس ثم سحب كرة ثالثة ما هو احتمال أن تكون ألوان الكرات الثلاث المسحوبة على الترتيب أبيض ، أسود، وأحمر؟ (0.03375)

11. سحب ورقة من مجموعة أوراق اللعب (52 ورقة) ثم أعيدت وسحب ورقة ثانية. أحسب الاحتمالات التالية:

- أ. أن تكون الورقة الثانية من نفس لون الورقة الأولى $(1/2)$
- ب. أن تكون الورقة الثانية هي نفس الورقة الأولى $(1/52)$
- ج. أن تحمل كل من الورقتين نفس العدد $(10/169)$
- د. أن تحمل كل من الورقتين نفس العدد أو نفس الصورة $(1/13)$
- هـ. أن تحمل كل من الورقتين نفس الصورة $(3/169)$

12. رميت قطعة نقود 3 مرات متتالية

أ. ما هو احتمال ألا تحدث صورتان متتاليتان في الرميات الثلاثة $(5/8)$

ب. ما هو احتمال ألا تحدث صورتان متتاليتان أو كتابتان في الرميات الثلاثة $(1/4)$

13. إذا كان احتمال أن يتأخر أياس عن عمله $\frac{2}{3}$ إذا ذهب إلى العمل ماشياً و $\frac{1}{4}$ إذا ذهب بالحافلة و $\frac{1}{6}$ إذا ذهب بسيارته . فما هو احتمال أن يتأخر عن عمله في صباح أحد الأيام إذا اختار وسيلته بطريقة عشوائية؟ (13/36)

14. إذا كان لدينا صندوقين الأول يحتوي على 5 مناديل معيبة و 8 مناديل سليمة والثاني يحتوي على 6 مناديل معيبة و 11 سليمة. فما هو احتمال أن يكون المنديل المسحوب عشوائياً من أحد الصندوقين معيباً ؟ (0.36878)

15. لتكن التجربة هي اختيار عائلته لديها أربعة أطفال وتسجيلهم حسب الجنس وتسلسل الولادة. اكتب الفراغ العيني لهذه التجربة ثم احسب الاحتمالات التالية:

- أ. عند العائلة بنت واحدة $(1/4)$
- ب. عند العائلة أكثر من بنتين $(5/16)$
- ج. عند العائلة 3 بنات على الأكثر $(15/16)$

16. تقدمت إحدى شركات البناء إلى مناقصتين A , B فإذا كان احتمال أن تحصل على المناقصة A هو 0.6 واحتمال أن تحصل على المناقصة B هو 0.3 واحتمال أن تحصل على المناقصتين معاً هو 0.1 فما هو احتمال:

- أن تحصل الشركة على المناقصة A أو المناقصة B (0.8)

17. دع A , B حادثين في الفراغ العيني S حيث

$$P(AB) = \frac{1}{5} \quad P(B/A) = \frac{1}{2} \quad P(A/B) = \frac{1}{3}$$
$$\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5} \right) \quad P(B), P(A) \text{ أوجد}$$

18. في أحد مصانع المصابيح الكهربائية إذا كانت الماكينات M_1 و M_2 و M_3 تصنع على الترتيب 0.30 و 0.30 و 0.40 من مجموع الإنتاج وإذا كان 1 و 3 و 2 بالمئة من إنتاج الماكينات الثلاث على الترتيب هو إنتاج معيب. سحب مصباحاً عشوائياً من إنتاج أحد الأيام وجد أنه معيب فما هو احتمال أن يكون هذا المصباح من صنع الماكينة M_1 ؟ من صنع M_2 ؟ من صنع M_3 ؟ (8/20 ، 9/20 ، 3/20) .

19. إذا سحبنا 5 ورقات من مجموعة أوراق اللعب (52 ورقة) بدون إعادة ، فما هو احتمال احتواء هذه الأوراق الخمسة على ورقة واحدة بها صورة شايب؟ (3243/10829).

20. الماكينة 1 تنتج 60% من إنتاج مصنع البطاريات الجافة والماكينة 2 تنتج الباقي. 5% من إنتاج الماكينة 1 معيب بينما 2% من إنتاج الماكينة 2 معيب. فما هو احتمال أن تكون بطارية معيبة قد صنعت في الماكينة 1؟ (30/38)

حل تمارين الاحتمالات

الفصل الأول

1.

$$\text{i)} \quad \frac{26}{52} \cdot \frac{26}{52} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{16}$$

$$\text{ii)} \quad \left(\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52}\right) + \left(\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52}\right) + \left(\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52}\right) + \left(\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52}\right) = \frac{1}{4}$$

2. عدد الحالات الممكنة هو 2^3 ، وهي كما في الرسم

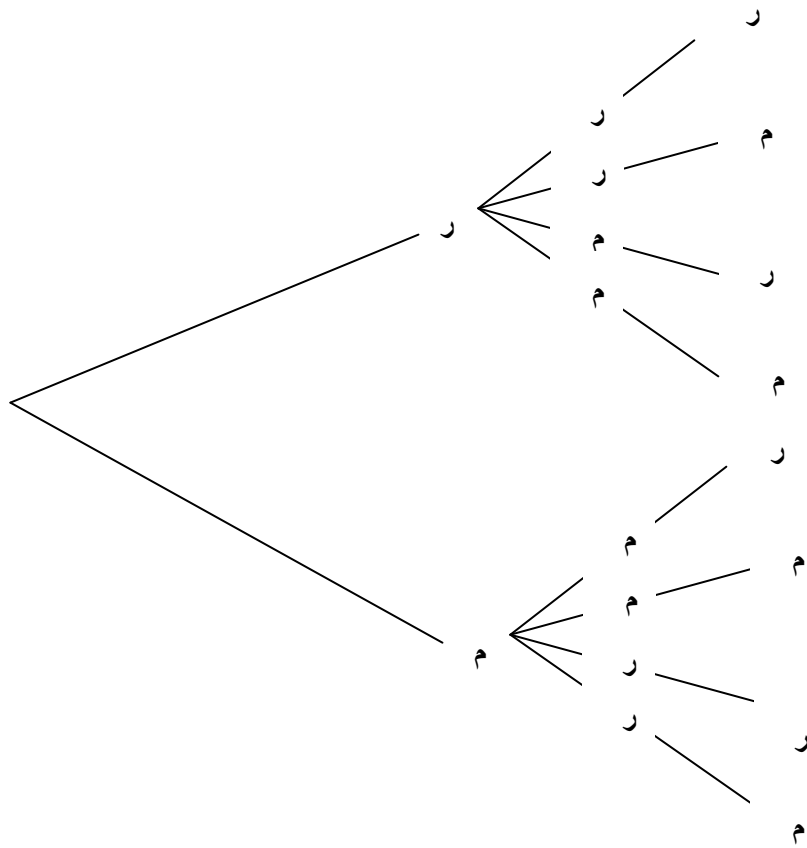
(i) احتمال الحصول على الثلاثة من جنس واحد ، أي 3 رجال أو 3 نساء.

من الرسم

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

أو

$$(1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2) + (1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2) = \frac{1}{4}$$



(ii) احتمال الحصول على رجلين وامرأة

من الرسم

$$\frac{3}{8} = \frac{\text{الحالات المواتية}}{\text{الحالات الممكنة}} =$$

أو

$$\frac{C_2^3}{8} = \frac{3}{8} =$$

3. الحالات الممكنة

$$2^5 = 32$$

احتمالات الصورة = احتمالات الكتابة =

$$C_5^5 \div 32 = 1/32$$

$$C_4^5 \div 32 = 5/32$$

$$C_3^5 \div 32 = 10/32$$

$$C_2^5 \div 32 = 10/32$$

$$C_1^5 \div 32 = 5/32$$

$$C_0^5 \div 32 = 1/32$$

4.

$$p(\text{ص ص ص}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

5. عدد الكرات الناتجة عن اللعبة = $3n$ لأنه يضع 3 كرات مع كل رمية

احتمال الحصول على صورة = احتمال الحصول على كتابة = $1/2$

∴ عدد المرات التي يضع فيها 3 كرات سوداء = عدد المرات

التي يضع فيها كرتين سوداوين وكرة بيضاء ويساوي $\frac{n}{2}$

∴ عدد الكرات البيضاء =

$$\frac{n}{2} \times 1 = \frac{n}{2}$$

عدد الكرات السوداء =

$$\frac{n}{2} \times 3 + \frac{n}{2} \times 2 = \frac{5n}{2}$$

$$= \frac{n}{2} \div 3n$$
$$= \frac{n}{2} \times \frac{1}{3n} = \frac{1}{6}$$

بيضاء	حمراء
حمراء	بيضاء
بيضاء	بيضاء
حمراء	حمراء

$$1 - \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} \right) = 1 - \frac{9}{35} = \frac{26}{35}$$

احتمال أن تكون كره على الأقل بيضاء = احتمال الأولى بيضاء والثانية حمراء
أو الأولى حمراء والثانية بيضاء
أو الأولى بيضاء والثانية بيضاء

$$= \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7}\right)$$
$$= \frac{26}{35}$$

7. الاحتمال المطلوب = احتمال أن تكون الثلاث كرات بيضاء أو

الثلاث حمراء أو الثلاث سوداء

$$P = \left(\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \right) + \left(\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} \right) = \frac{1}{10}$$

$$\text{أو} = \frac{C_3^3 + C_3^6 + C_3^3}{C_3^{12}} = \frac{1}{10}$$

8. الحالات الممكنة

$$C_3^{12} = 220$$

$$\begin{aligned} \text{i) } P (\text{عدم ظهور كرات حمراء}) &= \frac{C_3^9 C_0^3}{C_3^{12}} \\ &= \frac{84}{220} = \frac{21}{55} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } P (\text{كرة واحدة حمراء}) &= \frac{C_1^3 C_2^9}{C_3^{12}} \\ &= \frac{27}{55} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } P (\text{كرة واحدة على الأقل حمراء}) &= \frac{C_1^3 C_2^9}{C_3^{12}} + \frac{C_2^3 C_1^9}{C_3^{12}} + \frac{C_3^3 C_0^9}{C_3^{12}} \\ &= \frac{34}{55} \end{aligned}$$

أو

$$= 1-P \text{ (عدم ظهور كرة حمراء)}$$

$$= 1 - \frac{21}{55}$$

$$= \frac{34}{55}$$

$$\text{iv) } P \text{ (الكرات كلها من نفس اللون)} = \frac{C_3^5 + C_3^4 + C_3^3}{C_3^{12}}$$

$$= \frac{3}{44}$$

$$\text{v) } P \text{ (عدم وجود كرتين من نفس اللون)} = \frac{C_1^5 \cdot C_1^4 \cdot C_1^3}{C_3^{12}} = \frac{3}{11}$$

$$9. \text{ السعر} = \text{الاحتمال} \times \text{قيمة الجائزة}$$

$$= \frac{1}{100} \times 50$$

$$= \frac{1}{2}$$

∴ السعر العادل يجب أن يكون نصف دينار.

∴ سعر البطاقة غير عادل.

$$10. \text{ الاحتمال المطلوب}$$

$$P = \frac{45}{100} \cdot \frac{25}{100} \cdot \frac{30}{100}$$

$$= 0.03375$$

.11

(i) نفس احتمال الحصول على اللون في الورقة الأولى

$$= 1/2 \text{ لأن هناك لونين فقط أحمر وأسود}$$

(ii) نفس احتمال الورقة الأولى $= \frac{1}{52}$

الاحتمال المطلوب = احتمال أن تكون الورقتين

$$1 \text{ أو } 2 \text{ أو } \dots \text{ أو } 10$$

$$= \left(\frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} \right) + \left(\frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} \right) + \dots$$

$$= 10 \left(\frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} \right)$$

$$= \frac{10}{13^3}$$

$$= \frac{10}{169}$$

$$= 13 \left(\frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} \right) = \frac{1}{13} \quad \text{(iii)}$$

.i. 12 عدد الحالات الممكنة 8

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \text{ص ك ك، ص ك ص، ص ص ك، ص ص ص} \\ \text{ك ص ص، ك ص ك، ك ك ص، ك ك ك} \end{array} \right\}$$

عدد الحالات المواتية 5

$$\therefore \frac{5}{8} = \text{الاحتمال المطلوب}$$

$$P = \frac{2}{8} \quad \text{.ii}$$

$$= \frac{1}{4}$$

13. احتمال كل من الاختيارات الثلاثة $(1/3)$

الاحتمال المطلوب هو احتمال الذهاب ماشياً ويتأخر أو الذهاب بالحافلة ويتأخر أو الذهاب بسيارته ويتأخر

$$\begin{aligned} P(\text{التأخير}) &= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right) \\ &= \left(\frac{13}{36}\right) \end{aligned}$$

14. احتمال اختيار أي صندوق $1/2 =$

احتمال أن يكون قد سحب من الصندوق الأول ومعيب $\frac{1}{2} \times \frac{5}{13} =$

احتمال أن يكون قد سحب من الصندوق الثاني ومعيب $\frac{1}{2} \times \frac{6}{17} =$

$$\begin{aligned} P(\text{معيب}) &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{6}{17}\right) \\ &= 0.36878 \end{aligned}$$

15. $S = 2^4 = 16$

$$\text{i) } P(\text{بنت واحدة}) = \frac{C_1^4}{16}$$

$$\text{ii) } P(\text{أكثر من بنتين}) = \frac{C_3^4 + C_4^4}{16}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } P(\text{ثلاث بنات على الأكثر}) &= 1 - \frac{C_4^4}{16} \\ &= \frac{15}{16} \end{aligned}$$

$$\text{أو بتطبيق قانون ثنائي الحدين} = \frac{C_0^4 + C_1^4 + C_2^4 + C_3^4}{16}$$

.16

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= 0.6 + 0.3 - 0.1 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

.17

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A) P(B/A) \\ &= P(B) P(A/B) \\ \therefore P(A) &= \frac{P(AB)}{P(B/A)} = \frac{1/5}{1/2} = \frac{2}{5} \\ P(B) &= \frac{P(AB)}{P(A/B)} = \frac{1/5}{1/3} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

.18. لتكن

$$\begin{aligned} P(D) &= \text{احتمال أن يكون المصباح معيبا} \\ P(M_1) &= \text{احتمال أن يكون المصباح من صنع } M_1 \\ P(M_2) &= \text{احتمال أن يكون المصباح من صنع } M_2 \\ P(M_3) &= \text{احتمال أن يكون المصباح من صنع } M_3 \end{aligned}$$

بيانات المسألة تعطي الاحتمالات الآتية

$$P(M_1) = 0.3 \quad P(D/M_1) = 0.01$$

$$P(M_2) = 0.3 \quad P(D/M_2) = 0.03$$

$$P(M_3) = 0.4 \quad P(D/M_3) = 0.02$$

دعنا الآن نحسب الاحتمالات التالية

$$P(M_1D) = P(M_1) P(D/M_1) = (0.3) (0.01) = 0.003$$

$$P(M_2D) = P(M_2) P(D/M_2) = (0.3) (0.03) = 0.009$$

$$P(M_3D) = P(M_3) P(D/M_3) = (0.4) (0.02) = 0.008$$

هذه الاحتمالات جميعاً يمكن تمثيلها بيانياً.

باستخدام نظرية بييز

$$P(M_1 / D) = \frac{P(M_1D)}{P(M_1D) + P(M_2D) + P(M_3D)}$$

$$= \frac{0.003}{0.003 + 0.009 + 0.008} = \frac{3}{20}$$

$$P(M_2 / D) = \frac{P(M_2D)}{P(M_1D) + P(M_2D) + P(M_3D)}$$

$$= \frac{0.009}{0.020} = \frac{9}{20}$$

$$P(M_3 / D) = \frac{0.008}{0.020} = \frac{8}{20}$$

ويمكن تلخيص الاحتمالات السابقة بالجدول التالي:

الحادث	الاحتمال القبلي	الاحتمال الشرطي	الاحتمال المركب	الاحتمال البعدي
M ₁	0.30	0.01	0.003	3/20
M ₂	0.30	0.03	0.009	9/20
M ₃	0.40	0.02	0.008	8/20
المجموع	1.00		0.020	1.00

19. باستخدام القانون الهايبرجيومتري

$$P(\text{شايب واحد}) = \frac{C_1^4 C_4^{48}}{C_5^{52}} = \frac{3243}{10829}$$

حل آخر هناك خمس حالات متنافية لوقوع هذا الحادث تختلف عن بعضها في

ترتيب سحب ورقة الشايب، لنأخذ الحالة الأولى التي يظهر فيها

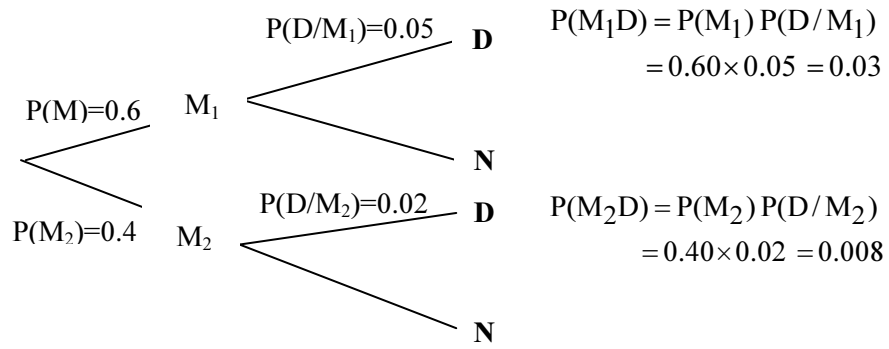
الشايب من أول سحب في هذه الحالة يكون الاحتمال =

$$\frac{4}{52} \times \frac{48}{51} \times \frac{47}{50} \times \frac{46}{49} \times \frac{45}{48} = \frac{4243}{54145}$$

وحيث أن الحالات الخمس متماثلة فإن الاحتمال المطلوب هو

$$5 \times \frac{4243}{54145} = \frac{4243}{10829}$$

.20



$$\begin{aligned} P(M_1/D) &= \frac{P(M_1D)}{P(M_1D) + P(M_2D)_2} \\ &= \frac{0.03}{0.03 + 0.008} \\ &= \frac{0.03}{0.038} = \frac{30}{38} \\ &= 0.7895 \end{aligned}$$

الفصل الثاني

الفصل الثاني

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

RANDOM VARIABLES AND PROBABILITY DISTRIBUTIONS

مر معنا في الفصل السابق عدة تجارب مثل حذف زهرة النرد أو رمي قطعة النقد أو سحب كره أو سحب ورقة من أوراق اللعب ... الخ ، ان النتائج التي يمكن الحصول عليها بتجارب عشوائية، رقمية كانت كما في حالة النرد أو نوعية كما في الكرات وقطعة العملة وورق اللعب وغيرها تدعى بالمتغيرات العشوائية.

- المتغير العشوائي
هو المتغير الذي يتم الحصول على قيمته نتيجة لتجربه عشوائية

المتغير العشوائي يمكن أن يكون متقطعا DISCRETE أو متصلاً

CONTINUOUS

المتغير المتقطع:

هو المتغير العشوائي الذي يأخذ قيمة من قيم الأعداد الصحيحة

مثل 1 ، 2 ، 3 ، ...

أمثلة على المتغير المتقطع :

- عدد أفراد الأسرة في عينة إحصائية مكونه من عدة أسر
- عدد الأهداف المسجلة لفريق رياضي خلال الدوري العام
- عدد السيارات المباعة في الشهر لإحدى شركات السيارات ... الخ

المتغير المتصل:

هو المتغير العشوائي الذي يأخذ أي قيمة داخل مدى معين مثل مقاييس الطول والوزن والزمن والقيمة.

أمثلة على المتغير المتصل:

- المبيعات الشهرية من الحليب لإحدى مؤسسات الألبان .
- أطوال طلبة الجامعة .
- أوزان طلاب الصف الأول الابتدائي في إحدى المدارس.
- أثمان البرميل الواحد للنفط الكويتي خلال السنة الأخيرة ... الخ.

■ التوزيعات الاحتمالية المتقطعة Discrete

Probability Distributions

إذا رمينا زهره نرد فإنه يمكننا ان نمثل النتائج الممكنة واحتمالات كل منها بالجدول التالي:

الوجه	1	2	3	4	5	6
الاحتمال	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

وإذا رمينا زهرتي نرد وكنا مهتمين بمجموع وجهي الزهر فإنه يمكننا

أن نمثل النتائج الممكنة واحتمال كل منها بالجدول التالي:

المتغير العشوائي مجموع الوجهين	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الاحتمال	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

هذا الجدول الذي يتضمن قيم المتغير العشوائي والاحتمالات المناظرة لها يسمى بالتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع ، وهكذا فإن :

التوزيع الاحتمالي لمجموعة القيم المتقطعة التي يأخذها متغير عشوائي متقطع هو الجدول أو القائمة التي تتضمن جميع القيم الممكنة لهذا المتغير مع الاحتمال الخاص بكل منها.

■ دالة كثافة الاحتمال (P.D.F.) Probability Density Function

إذا كان لدينا متغير متقطع X يأخذ قيما مختلفة $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ باحتمال $P(X=x_i)$ حيث $i = 1, 2, \dots, n$ فإن هذا الاحتمال يسمى بالدالة الاحتمالية أو كثافة الاحتمال ويرمز لها بالرمز $f(x_i)$.

وهكذا فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي x هي الاحتمال بأن يأخذ x أي قيمة من قيمة الممكنة أي $P(X=x_i)$ ويرمز لها بالرمز $f(x)$ على أن يتحقق ما يلي:

$$i) f(x) \geq 0$$

$$ii) \sum_{i=1}^n f(x_i) = 1$$

وتأخذ داله كثافة الاحتمال للمتغير المتقطع X الشكل التالي:

$X = x$	x_1	$x_2 \dots \dots \dots x_n$
$f(x) = P(X=x)$	$f(x_1)$	$f(x_2) \dots \dots \dots f(x_n)$

مثال 1 :

إذا كان لدينا المتغير العشوائي المتقطع X وهو عدد مرات الحصول على وجه الكتابة عند رمي قطعة نقدية مرتين فإن :

الحالات الممكنة أو الفراغ العيني = { ص ص، ص ك، ك ص، ك ك }

القيم الممكنة ل X هي 0 ، 1 ، 2

أذن

$$f(x) = P(X=x)$$

$$f(0) = P(X=0) = 1/4$$

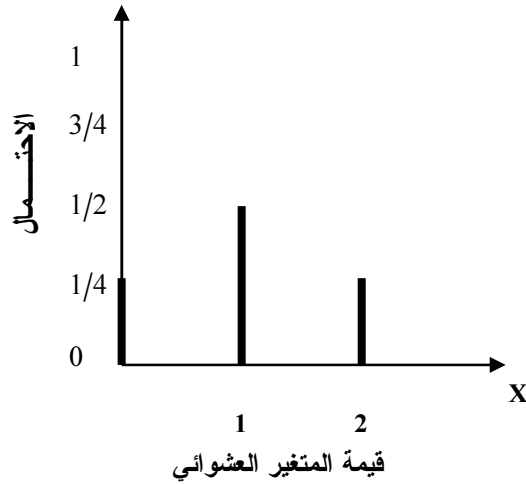
$$f(1) = P(X=1) = 1/2$$

$$f(2) = P(X=2) = 1/4$$

ويكون التوزيع الاحتمالي لقيم X الممكنة هو كما يلي:

$X = x$	0	1	2
$f(x) = P(X=x)$	1/4	1/2	1/4

ويمكن رسم هذا الجدول بيانيا كما يلي:



■ دالة التوزيع الاحتمالي Probability Distribution

لكننا في الغالب لا نهتم فقط باحتمال أخذ المتغير العشوائي لقيمة واحدة من قيمة الممكنة وإنما نهتم أيضاً باحتمال أخذ المتغير X لقيمة أقل من أو تساوى قيمة ما من قيمة الممكنة وهذه الدالة ندعوها بدالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هي الاحتمال بأن X أقل من

أو تساوي x أي $P(X \leq x)$ ويرمز لها بالرمز $F(x)$ ويكون

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

■ التوزيعات الاحتمالية المتصلة Continuous Probability

Distributions

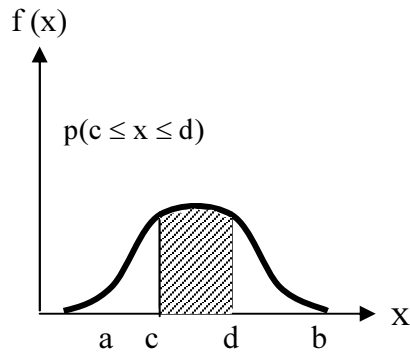
يمكننا أيضاً أن نعرف التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل بأنه الجدول أو القائمة الذي يبين لنا القيم المختلفة لهذا المتغير المتصل والاحتمال الخاص بكل قيمة من هذه القيم.

مثال 2 :

نفرض أن لدينا آلة ميكانيكية تملأ أكياساً من القهوة زنه كل كيس باوند واحد من القهوة ، ولكن لوجود خلل في أحد المراحل الميكانيكية يختلف الوزن من كيس إلى آخر ، فوزن الكيس هنا متغير عشوائي متصل والجدول التالي يعطي وزن 100 كيس مملوء بهذه الطريقة :

قيمة المتغير العشوائي X	عدد الاكياس (التكرارات)	الاحتمال f (x)
0.90	1	0.01
0.95	7	0.07
0.99	25	0.25
1.00	32	0.32
1.01	30	0.30
1.05	5	0.05
	100	1.00

فلو أردنا أن نعرف قيمة احتمال اختيار كيس عشوائياً بوزن يتراوح ما بين أي قيمتين لنقل 0.95 و 1.05 فإن عدد القيم الممكنة لهذا المتغير العشوائي تكون غير محدودة. ولذلك لا يمكننا أن نعالج المشكلة في حالة المتغير المتصل كما هو الحال في حالة المتغير المنقطع. على كل حال فإن مفهوم المساحة وخواصها تمكننا من تحديد الاحتمالات في حالة المتغيرات العشوائية المتصلة. ليكن X متغيراً متصلاً يقع في المدى (a, b) أي $a \leq x \leq b$ كما في الشكل التالي



فان احتمال أن يقع المتغير العشوائي المتصل x في المدى (a, d) يرمز له بالرمز $P(c \leq X \leq d)$ ويعطي كما يلي:

$P(c \leq x \leq d) =$ المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)$ والمحور الأفقي والمحددة بـ $x = c$, $x = d$ أي المساحة المظللة في الشكل .

تكون $f(x)$ دالة كثافة الاحتمال للمتغير المتصل X إذا كان :

i) $f(x) \geq 0$ موجب $f(x)$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ كامل المساحة تحت المنحنى $1 =$

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

$$(a \leq x \leq b)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (-\infty \leq x \leq \infty)$$

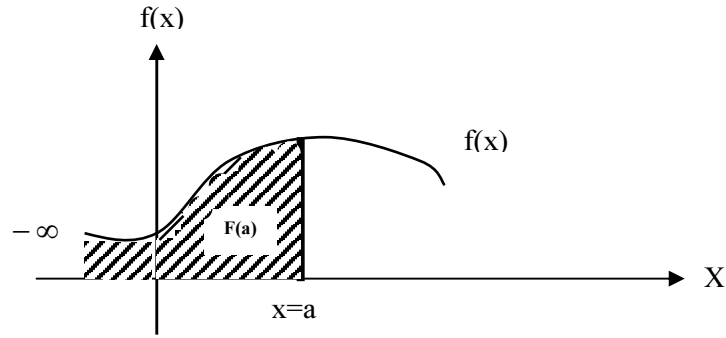
■ دالة كثافة الاحتمال التجميعية للمتغير العشوائي المتصل

هي الاحتمال بأن X أقل من أو يساوي a أي $P(x \leq a)$ ويرمز لها

بالرمز $F(x)$ وهكذا

$$F(x) = P(\bar{x} \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

وهي كما في الشكل التالي:



مثال 3:

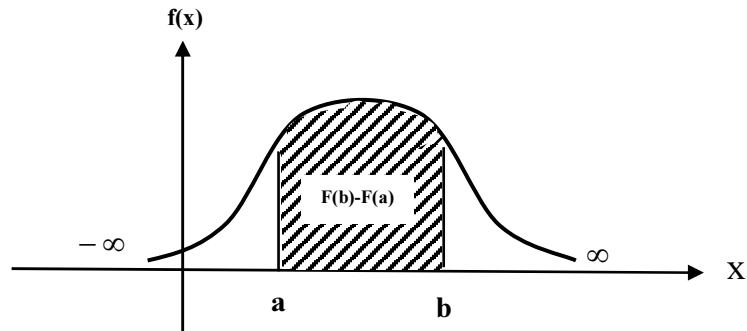
احتمال ان تقع X في المدى (a,b) يساوي

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

$$= f(b) - f(a)$$

وبالرسم :



تمارين

الفصل الثاني

1- إذا كان c ثابت و x متغير عشوائي داله احتماله هي

$$f(x) = c \binom{5}{x}$$

$$x = 0, 1, \dots, 5$$

فأوجد قيمة الثابت c

2- إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد حوادث السير في مدينة ما وكانت

C ثابت وداله الاحتمال X هي على الصورة التالية :

$X = x$	0	1	2	3	4	5
$f(x) = P(X=x)$	C	$2C$	$3C$	$4C$	$1.5C$	$0.5C$

أولاً: أوجد قيمة الثابت C

ثانياً: أوجد:

- i) $P(x < 3)$
- ii) $P(0 < x \leq 4)$
- iii) $P(0 < x < 2)$

ثالثاً: اكتب داله التوزيع الاحتمالي لـ X

3- إذا أُلقيت قطعة نقدية حتى تم الحصول على وجه الكتابة وكانت X متغير عشوائي يمثل عدد المرات التي أُلقيت بها قطعة النقد حتى تم الحصول على وجه الكتابة. أوجد داله احتمال المتغير X .

4- أريد اختيار أحد اشرطه التسجيل (الكاسيت) من مجموعة من 10 اشرطه فإذا كان المتغير العشوائي X يمثل رقم الشريط المختار فأوجد داله الاحتمال لـ X .

5- إذا كان X متغير عشوائي كثافة احتماله

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x \leq 2 \text{ و}$$

أوجد :

- i) $P (0.5 < x < 1.5)$
- ii) $P (x > 0.25)$
- iii) $P (x < 0.75)$
- iv) $P (x > 3)$

6- إذا كانت

$$f(x) = \frac{2-x}{2}$$

$$0 < x < 2$$

و

أوجد :

- i) $P (0.5 < x < 1)$
- ii) $P (x > 1.5)$
- iii) $P (x < 0.3)$
- iv) $P (0 < x < 2)$

7- في أحد الامتحانات الشفوية المكون من خمسة أسئلة ، إذا كان احتمال أن يجيب أحد الممتحنين على أي سؤال أجابه صحيحة هو 0.6 .
ورمزنا لعدد الأسئلة التي يجيب عليها إجابات صحيحة قبل أول فشل له في الإجابة بالرمز x .
أوجد توزيع x الاحتمالي .

8- دولاب عليه ثلاثة أرقام هي 2 ، 3 ، 4 إذا أدرنا الدولاب مرتين بحيث يؤشر المؤشر في كل مرة على أحد الأرقام الثلاثة وإذا فرضنا أن x تمثل مجموع الرقمين الناتجين . أحصر النتائج الممكنة واستنتج توزيع x الاحتمالي.

9- إذا كان احتمال أن ينجح الطالب في امتحان الإحصاء هو $\frac{1}{4}$ ، تقدم للامتحان ثلاثة طلاب. إذا فرضنا بأن x تمثل عدد الناجحين . أحصر النتائج الممكنة واستنتج التوزيع الاحتمالي لـ x .

حل تمارين الفصل الثاني

-1

$$\begin{aligned}\sum_{\text{all } x} f(x) &= 1 \\ \therefore \sum C \binom{5}{x} &= 1 \\ C \sum \binom{5}{x} &= 1 \\ C (1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1) &= 1 \\ C &= 1/32\end{aligned}$$

-2 أولاً:

$$\begin{aligned}\sum_{\text{all } x} f(x) &= 1 \\ \therefore C + 2C + 3C + 4C + 1.5C + 0.5C &= 1 \\ \therefore C &= 1/12\end{aligned}$$

ثانياً:

$$\begin{aligned}\text{i) } P(x < 3) &= P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) \\ &= C + 2C + 3C \\ &= 6C \\ &= 6(1/12) \\ &= 1/2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ii) } P(0 < X \leq 4) &= P(X=1) + P(X=2) + \\ &P(X=3) + P(X=4) \\ &= 2C + 3C + 4C + 1.5C\end{aligned}$$

$$= 10.5 \cdot C$$

$$= 10.5 (1/12)$$

$$= 10.5/12$$

أو

$$= 1 - [P(X=0) + P(X=5)]$$

$$= 1 - (C + 0.5 C)$$

$$= 10.5 C$$

$$= \frac{10.5}{12}$$

$$\text{iii) } P(0 < X < 2) = P(X=1)$$

$$= 2 C$$

$$= 2/12 = 1/6$$

ثالثاً : دالة التوزيع الاحتمالي لـ x

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(0) = P(X \leq 0) = 1/12$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = 3/12$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = 6/12$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = 10/12$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = 23/24$$

$$F(5) = P(X \leq 5) = 1$$

–3

$$f(x) = (1/2)^x$$

$$x = 1, 2, \dots$$

–4

X = x	1	2	310
f(x) = P(X=x)	1/10	1/10	1/10 1/10

$$f(x) = 1/10$$

$$x = 1, 2, \dots, 10$$

–5

$$\text{i) } P(0.5 < x < 1.5) = \int_{0.5}^{1.5} 1/2 \, dx$$

=

$$\left| \frac{x}{2} \right|_{0.5}^{1.5}$$

$$= 1/2$$

$$\text{ii) } P(x > 0.25) = \int_{0.25}^2 1/2 \, dx$$

$$= 7/8$$

$$\text{iii) } P(x < 0.75) = \int_{0.5}^{0.75} 1/2 \, dx$$

$$= 3/8$$

$$\text{iv) } P(x > 3) = \int_3^{\infty} 1/2 \, dx$$

$$= 0$$

$$0 \leq x \leq 2 \text{ لأن}$$

-6

$$\begin{aligned} \text{i) } P(0.5 < x < 1) &= \int_{0.5}^1 \frac{2-x}{2} \, dx \\ &= \int_{0.5}^1 1 - \frac{x}{2} \, dx \\ &= \int_{0.5}^1 x^0 \, dx - \int_{0.5}^1 \frac{x}{2} \, dx \\ &= \left| x \right|_{0.5}^1 - \left| \frac{x^2}{4} \right|_{0.5}^1 \\ &= 1/2 - \frac{3}{16} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } P(x > 1.5) &= \int_{1.5}^2 \frac{2-x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } P(x < 0.3) &= \int_0^{0.3} \frac{2-x}{2} \, dx \\ &= 0.2775 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv) } P(0 < x < 2) &= \int_0^2 \frac{2-x}{2} dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

–7

x	0	1	2	3	4	5
p(x)	0.4	$(0.6)^1$ (0.4)	$(0.6)^2$ (0.4)	$(0.6)^3$ (0.4)	$(0.6)^4$ (0.4)	$(0.6)^5$

–8

x	4	5	6	7	8
p(x)	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

–9

$$P(x) = C_x^n p^x q^{n-x}$$

$$P(0) = \frac{27}{64} \quad , \quad P(1) = \frac{27}{64} \quad , \quad P(2) = \frac{9}{64}$$

$$P(3) = \frac{1}{64}$$

الفصل الثالث

الفصل الثالث

أدلة توصيف التوزيعات الاحتمالية

التوقع ، التباين ، والتغاير

يمكن عن طريق بعض المعلمات (البارامترات) أن نحدد صفات المجتمع الإحصائي وأن نقارن المجتمعات الإحصائية بعضها ببعض ، ومن أهم هذه المعلمات : **التوقع** وهو يحدد مركز الموضع للمجتمع و**التباين** وهو مقياس الانتشار و**التغاير** وهو مقياس للارتباط بين متغيرين .

وفيما يلي نتناول دراسة هذه المعلمات :

■ التوقع Expectation

إذا كان x متغير عشوائي كثافة احتماله $f(x)$ فيعرف المقدار

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

بالتوقع . وهذا المقدار سيكون ثابتاً (لأنه تكامل محدود) ولكنه يعتمد على

الثوابت التي تتضمنها دالة كثافة الاحتمال $f(x)$

وإذا كان المتغير x متقطعاً يصبح التوقع في هذه الحالة يساوي

$$\sum_{\text{all } x} x P(x)$$

حيث $P(x)$ الدالة الاحتمالية للمتغير x

سنرمز لتوقع x بالرمز $E(X)$ حيث الحرف E يشير إلى عملية رياضية

معينة تجرى على المتغير x ومضمونها :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu$$

أو

$$= \sum_{\text{all } x} xP(x) = \mu$$

حسب كون المتغير x متصلاً أو منقطعاً.

كما يدعى التوقع $E(x)$ بالوسط الحسابي للتوزيع الاحتمالي ويستخدم الحرف الإغريقي μ (ميو) في الغالب للتعبير عن القيمة المتوقعة للمتغير x .

ويلاحظ من صيغة التوقع (في حالة المتغير المتقطع مثلاً) أنها تشبه أوزاناً $P(x)$ معلقة عند النقط x_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) والتوقع يقابل حساب مركز ثقل هذه الأوزان وهي نقطة الاتزان.

إذا كان x متغيراً عشوائياً فإن أي دالة في x (نقل مثلاً $\phi(x)$) هي الأخرى متغير عشوائي وتوقعه يساوي:

$$\begin{aligned} E[\phi(x)] &= \sum_{\text{all } x} \phi(x) P(x) \\ &= \int_{\text{Range } x} \phi(x) f(x) dx \end{aligned}$$

حسب كون x منقطعاً أو متصلاً.

$$\phi(x) = x^r \quad \text{لنأخذ}$$

يكون

$$E(x^r) = \sum_{\text{all } x} x^r P(x)$$

$$= \int_{R_x} x^r f(x) dx$$

ولنجعل $r = 1$

يكون

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{\text{all } x} x P(x) = \mu \\ &= \int_{R_x} x f(x) dx = \mu \end{aligned}$$

مثال 1 :

ألقيت قطعة نقد معدنية ثلاث مرات متتالية فما هو التوقع الرياضي

لعدد مرات ظهور "صورة"؟

الحل

يمكننا أن نمثل الفراغ العيني والاحتمالات المناظرة في الجدول التالي:

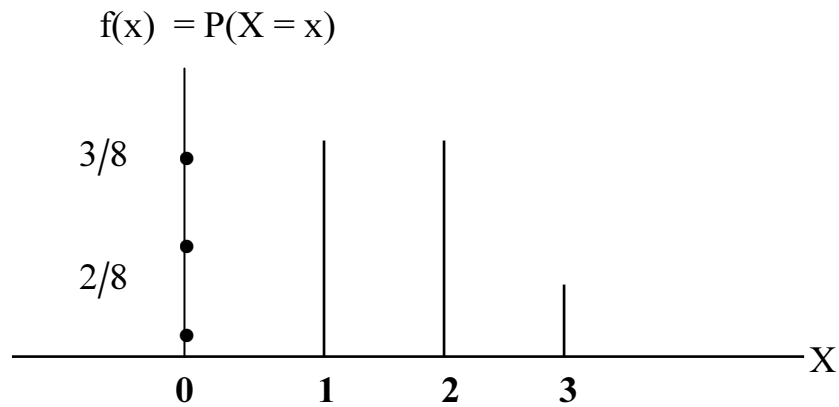
الاحتمال	عدد ظهور الصورة	الحالات الممكنة
1/8	3	ص ص ص
1/8	2	ص ص ك
1/8	2	ص ك ص
1/8	1	ص ك ك
1/8	0	ك ك ك
1/8	1	ك ك ص
1/8	1	ك ص ك
1/8	2	ك ص ص

نمثل عدد مرات الحصول على وجه صوره عندما القيت X دع
معطاه في الجدول التالي: X قطعته النقد ثلاث مرات داله الاحتمال للمتغير

$X = x$	0	1	2	3
$f(x) = P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{i=0}^3 X_i P(x_i) \\
 &= 0 \left(\frac{1}{8}\right) + 1 \left(\frac{3}{8}\right) + 2 \left(\frac{3}{8}\right) + 3 \left(\frac{1}{8}\right) \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

ويمكننا أن نمثل الدالة الاحتمالية المبينة في الجدول السابق بالرسم البياني
التالي:



■ خواص التوقع Properties of Expected Value

عبارة عن رمز يشير إلى عملية رياضية معينة E رأينا أن دليل التوقع تجري على المتغير الإحصائي التالي لهذا الدليل ويمتاز هذا الدليل بالخواص التالية:

إذا كان a ثابت و x متغير عشوائي فإن

$$E(ax) = aE(X)$$

البرهان:

$$\begin{aligned} E(ax) &= \sum_{\text{all } x} ax P(x) \\ &= a \sum_{\text{all } x} x P(x) \\ &= a E(X) \end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned} E(ax) &= \int_{-\infty}^{\infty} a x f(x) dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= a E(x) \end{aligned}$$

توقع الثابت يساوي الثابت

متغير عشوائي فإن X ثابت و a إذا كان

$$E(a) = a$$

البرهان :

$$\begin{aligned} E(a) &= \sum_{\text{all } x} aP(x) \\ &= a \sum P(x) \\ &= a(1) \\ &= a \end{aligned}$$

نتيجة :

$$E(ax+b) = a E(x) + b$$

البرهان :

$$\begin{aligned} E(ax+b) &= E(ax) + E(b) \\ &= a E(x) + b \end{aligned}$$

مثال 2 :

$$E(2x + 3) = 2 E(x) + 3$$

توقع التوقع يساوي التوقع

$$E[E(x)] = E(x)$$

البرهان:

بما أن التوقع قيمة ثابتة كما ذكرنا وبما أن توقع الثابت يساوي الثابت
أذن توقع التوقع يساوي التوقع.

z بالقيمة الثابتة $E(x)$ فلو رمزنا إلى توقع

$$E(z) = z$$

$$E[E(x)] = E(x) \text{ ومنها}$$

$$-4E [(X - E(x))] = 0$$

البرهان :

$$\begin{aligned} E [(x - E(x))] &= E(x) - E(E(x)) \\ &= E(x) - E(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

نظرية 1 : إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين فإن :

$$E(X \pm Y) = E(x) \pm E(Y)$$

أي أن توقع مجموع متغيرين يساوي مجموع توقعات المتغيرين

البرهان :

$$\begin{aligned} E(X \pm Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x \pm y) f(x,y) dx dy \\ &= \int \int x f(x,y) dx dy \pm \int \int y f(x,y) dx dy \\ &= \int x \left[\int f(x,y) dy \right] dx \pm \int y \left[\int f(x,y) dx \right] dy \\ &= \int x f(x) dx \pm \int y f(y) dy \\ &= E(X) \pm E(y) \end{aligned}$$

نظرية 2 : إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين فإن :

$$E(XY) = E(X) E(Y)$$

البرهان :

$$E(XY) = \int \int XY f(x,y) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int \int xy f(x) f(y) dx dy \dots\dots \text{لاستقلال} \\
&= \int x f(x) dx \int y f(y) dy \\
&= E(X) E(Y)
\end{aligned}$$

مثال 3 :

إذا كان X متغيراً عشوائياً دالته الاحتمالية هي:

$$f(x) = 2x$$

$$0 \leq X \leq 1 \quad \text{وأن}$$

فأوجد كل من

$$E(x+1)^2 \quad E(x^2) \quad E(x)$$

الحل:

$$\begin{aligned}
E(x) &= \int_0^1 x f(x) dx \\
&= \int_0^1 x (2x) dx \\
&= \int_0^1 2x^2 dx \\
&= 2 \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^1 \\
&= 2 \left| \frac{1}{3} - 0 \right| \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(x^2) &= \int_0^1 x^2 f(x) dx \\
&= \int_0^1 x^3 (2x) dx \\
&= \int_0^1 2x^3 dx \\
&= 2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(x+1)^2 &= E[x^2 + 2x + 1] \\
&= E(x^2) + 2E(x) + 1 \\
&= \frac{1}{2} + 2\left(\frac{2}{3}\right) + 1 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 1 \\
&= \frac{17}{6}
\end{aligned}$$

Variance & Standard Deviation التباين والانحراف المعياري

نعرف ان التباين والانحراف المعياري هي مقاييس للتشتت (Dispersion) أو لتوزيع تكراري ولكننا سنناقشهما الآن كمقاييس للتشتت للتوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي .

أن القيمة المتوقعة (أو الوسط الحسابي) لتوزيع احتمالي لمتغير عشوائي ما تدلنا على مركز التوزيع الاحتمالي وتعطينا معلومات سريعة عن

الوسط في المدى البعيد إذا ما استمر في إجراء تجربة ما أكثر ، ولكنها لا تعطينا أي معلومات عن مدى انتشار أو تشتت قيم المتغير العشوائي من تجربته إلى أخرى. وسنتطرق هنا إلى أكثر المقاييس شيوعاً واستعمالاً من مقاييس تشتت التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي وهي التباين والانحراف المعياري. ان تباين التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي يقاس غالباً بنفس طريقة قياسه في حالة التوزيع التكراري والفرق الوحيد هو أننا الآن نجد متوسط مربع انحرافات القيم عن القيمة المتوقعة بدلاً من إيجاد متوسط مربع الانحرافات عن الوسط الحسابي للعينة أو التوزيع التكراري.

- التباين

هو متوسط مربع X تباين التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X عن القيمة المتوقعة للتوزيع الاحتمالي للمتغير X انحرافات قيم $E(x) = \mu$ فإذا كان

فان $\text{Var}(x)$ أو σ_x^2 — X وإذا رمزنا الى تباين

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 = \text{Var}(x) &= \sum_{\text{all } x} (x - \mu)^2 p(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx\end{aligned}$$

حسب كون المتغير متقطعاً أو متصلاً

$$\begin{aligned}&= E [(x-u)^2] \\ &= E [x - E(x)]^2\end{aligned}$$

أي أن التباين هو عبارة عن توقع مربع انحرافات القيم عن توقعها.
وهكذا X الداخلة في حساب التباين هي القيم المربعة لـ X نلاحظ أن قيم
وإنما يقيمها المربعة وكي نحصل على X فإن التباين لا يقيس التشتت بنفس قيم
فأننا نجد الجذر التربيعي الموجب للتباين وهو ما X مقياس للتشتت بنفس قيم
يدعى بالانحراف المعياري.

- الانحراف المعياري

هو الجذر التربيعي X الانحراف المعياري لمتغير عشوائي
ويساوي: σ_x ويرمز له بالرمز X الموجب لتباين

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{E(x - \mu)^2}$$

ننصح الطلاب بالعودة إلى طرق حساب التباين والانحراف المعياري
للتوزيع التكراري قبل المضي قدما في هذا الجزء.

مثال 4 :

هي X بالعودة إلى مثال (1) وهو إلقاء قطعه نقد ثلاث مرات ، دع
المتغير العشوائي عد مرات ظهور الوجه صورة. الجدول التالي يعطي دالة
والانحراف المعياري σ_x^2 وكيفية حساب كل من التباين X الاحتمال للمتغير
 σ_x .

$X = x$	$f(x) = P(X=x)$	$Xf(x)$	$(x-E(x))^2$	$[x-E(x)]^2 f(x)$
0	1/8	0	$(0-3/2)^2 = 9/4$	9/32
1	3/8	3/8	$(1-3/2)^2 = 1/4$	3/32
2	3/8	6/8	$(2-3/2)^2 = 1/4$	3/32
3	1/8	3/8	$(3-3/2)^2 = 9/4$	9/32
		$E(x)$ $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$		$\sigma_x^2 = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$

وهكذا فإن $\sigma_x^2 = \frac{3}{4}$ التباين

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نظرية: إذا كان X متغيريا عشوائيا توقعه $\mu = E(x)$ وتباينه

$$Var(x) = \sigma_X^2$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E(x^2) - [E(x)]^2 \\ &= E(x^2) - \mu^2\end{aligned}$$

البرهان :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[(x - E(x))^2] \\ &= E[x^2 - 2xE(x) + \{E(x)\}^2] \\ &= E(x^2) - 2\{E(x)\}^2 + \{E(x)\}^2 \\ &= E(x^2) - [E(x)]^2\end{aligned}$$

مثال 5 :

بالعودة إلى المثال السابق وهو رمي قطعه نقد 3 مرات فان الجدول التالي يعطي طريقه حساب التباين والانحراف المعياري لـ X باستخدام النظرية السابقة

$$[\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2]$$

$X = x$	$f(x)$	$xf(x)$	$x^2f(x)$
0	1/8	0	$(0)^2 = (1/8) = 0$
1	3/8	3/8	$(1)^2 (3/8) = 3/8$
2	3/8	6/8	$(2)^2 (3/8) = 12/8$
3	1/8	1/8	$(3)^2 (1/8) = 9/8$
		$E(x) = \frac{3}{2}$	$E(x^2) = \frac{24}{8} = 3$

وهكذا فان التباين يساوي

$$\sigma^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$= 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4}$$

والانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي الموجب للتباين =

$$\sigma = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

■ خواص التباين Properties of Variance

هناك عدة خواص للتباين وهذه الخواص تسهل علينا حساب التباين لأي

دالة في المتغير العشوائي X وأهم الخواص هي:

(1) إذا كان a ثابت و X متغير عشوائي فإن

$$\text{Var} (ax) = a^2 \text{Var} (x)$$

البرهان :

$$\text{Var} (ax) = E [ax - E (ax)]^2$$

$$= E [ax - a E (x)]^2$$

$$= a^2 E [x - E (x)]^2$$

$$= a^2 \text{var} (x)$$

مثال 6 :

إذا كان تباين x يساوي 0.5 فما هو تباين المتغيرات التالية:

$$2X \quad (i)$$

$$\frac{X}{2} \quad (ii)$$

الحل:

$$i) \quad \text{Var} (2x) = 4 \text{Var} (x)$$

$$= 4 (0.5)$$

$$= 2$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \text{Var} \left(\frac{X}{2} \right) &= \frac{1}{4} \text{Var} (x) \\ (0.5) \frac{1}{4} &= \\ &= 0.125 \end{aligned}$$

(2) تبين الثابت يساوي صفر

إذا كان a ثابت فان

$$\text{Var} (a) = 0$$

البرهان :

$$\begin{aligned} \text{Var} (a) &= E [a - E (a)]^2 \\ &= E (a - a)^2 \\ &= E (0^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

نتيجة :

$$a = \text{Var} (x) \pm \text{Var} (x)$$

البرهان :

$$\text{Var} (a) \pm a = \text{Var} (x) \pm \text{Var} (x)$$

$$0 \pm = \text{Var} (x)$$

$$= \text{Var} (x)$$

وهكذا فان إضافة أي قيمة أو طرح أي قيمة ثابتته إلى أو من المتغير العشوائي لا تؤثر على التباين لهذا المتغير.

مثال 7 : إذا كان تباين المتغير x يساوي 5 فما هو تباين كل من :

i) $x + 3$

ii) $x - 6$

الحل :

i) $\text{Var}(x + 3) = \text{Var}(x) = 5$

ii) $\text{Var}(x - 6) = \text{Var}(x) = 5$

(3) إذا كان X ، Y متغيرين عشوائيين مستقلين فان :

$$\text{Var}(x+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

$$\text{Var}(x - y) = \text{Var}(x) + \text{Var}(y)$$

أي أن تباين مجموع متغيرين عشوائيين مستقلين أو الفرق بينهما يساوي مجموع تباينيهما.

البرهان :

$$\text{Var}(X \pm Y) = E [(X \pm Y) - E(X \pm Y)]^2$$

$$= E [\{X - E(x)\} \pm \{Y - E(y)\}]^2$$

$$= E [\{X - E(x)\}^2 + \{Y - E(y)\}^2 \pm 2\{X - E(x)\}\{Y - E(y)\}]$$

$$= E \{X - E(x)\}^2 + E\{Y - E(y)\}^2 \pm 2E[\{X - E(x)\}\{Y - E(y)\}]$$

$$= \text{Var}(x) + \text{Var}(Y) \pm 2E[\{X - E(x)\}\{Y - E(Y)\}]$$

وهكذا فعلينا أن نثبت بأن الحد الأخير يساوي صفر بما أن الحادثين مستقلين
يكون الحد الأخير مساوياً

$$\begin{aligned}
 &= 2 [E \{x - E(x)\} E\{Y - E(y)\}] \\
 &= 2 [(0) (0)] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(x) + \text{Var}(Y)$$

ويمكن تعميم هذه القاعدة على أي عدد غير محدود من المتغيرات المستقلة أي
أن :

$$\text{Var}(x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \dots \pm x_n) = \text{Var}(x_1) + \text{Var}(x_2) + \dots + \text{Var}(x_n)$$

■ التغاير Covariance

وهو مقياس للارتباط بين متغيرين Y, X فإذا كانت $f(xy)$ دالة كثافة احتمال
هذين المتغيرين معا فان تغاير المتغيرين Y, X يعرف رياضياً كما يلي :

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X, Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [X - E(x)] [Y - E(y)] f(xy) dx dy \\
 &= E [\{X - E(x)\} \{Y - E(y)\}]
 \end{aligned}$$

– التغاير

وهكذا فان التغاير للمتغيرين Y, X (والذي يرمز له بالرمز C أو Cov) هو عبارته عن توقع حاصل ضرب انحرافي المتغيرين عن مركزيهما أي يساوي :

$$Cov(x, Y) = E [(x - \mu_x) (Y - \mu_y)]$$

▪ خواص التغاير

1- تغاير X, X هو تباين X أي

$$Cov(x, x) = Var(x)$$

البرهان:

بوضع X بدل Y في معادله التغاير أعلاه نصل إلى المطلوب

2- إذا كان a, b ثابتين فان :

$$Cov(ax, by) = ab Cov(x, y)$$

البرهان:

$$\begin{aligned} Cov(ax, by) &= E[\{ax - E(ax)\}\{by - E(by)\}] \\ &= ab E\{x - E(x)\}\{Y - E(y)\} \\ &= ab cov(x, y) \end{aligned}$$

3- إذا كان a ثابت فان

$$Cov(x, a) = 0$$

البرهان :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(x, a) &= E[\{x - E(x)\} \{a - E(a)\}] \\ &= E[\{x - E(x)\} \{0\}] \\ &= 0\end{aligned}$$

-4

$$\text{Cov}(x_1 + x_2, y) = \text{Cov}(x_1, y) + \text{Cov}(x_2, y)$$

البرهان :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(x_1 + x_2, y) &= E[\{(x_1 + x_2) - E(x_1 + x_2)\} \{y - E(y)\}] \\ &= E[\{x_1 - E(x_1)\} \{y - E(y)\}] + E[\{x_2 - E(x_2)\} \{y - E(y)\}] \\ &= \text{Cov}(x_1, y) + \text{Cov}(x_2, y)\end{aligned}$$

5- في حالة أي متغيرين x_2, x_1 فان

$$\text{Var}(x_1 + x_2) = \text{Var}(x_1) + \text{Var}(x_2) + 2\text{Cov}(x_1, x_2)$$

$$\text{Var}(x_1 - x_2) = \text{Var}(x_1) + \text{Var}(x_2) - 2\text{Cov}(x_1, x_2)$$

البرهان :

$$\begin{aligned}\text{Var}(x_1 + x_2) &= E[(x_1 + x_2) - E(x_1 + x_2)]^2 \\ &= E[\{x_1 - E(x_1)\} + \{x_2 - E(x_2)\}]^2 \\ &= E[x_1 - E(x_1)]^2 + E[x_2 - E(x_2)]^2 + \\ &\quad 2 E[\{x_1 - E(x_1)\} \{x_2 - E(x_2)\}] \\ &= \text{Var}(x_1) + \text{Var}(x_2) + 2 \text{Cov}(x_1, x_2)\end{aligned}$$

وبالمثل في حالة تباین الفرق بین متغيرين أي في حالة

$$\text{Var} (x_1 - x_2)$$

6- إذا كان x_1, x_2 متغيرين مستقلين فإن

$$\text{Cov} (x_1, x_2) = 0$$

البرهان :

$$\begin{aligned} \text{Cov} (x_1, x_2) &= E[\{x_1 - E(x_1)\} \{x_2 - E(x_2)\}] \\ &= E[x_1 x_2 + E(x_1) E(x_2) - x_1 E(x_2) - x_2 E(x_1)] \\ &= E(x_1) E(x_2) + E(x_1) E(x_2) - E(x_1) E(x_2) - E(x_1) E(x_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

وبما أن المتغيرين مستقلين يكون

$$E (x_1 x_2) = E (x_1) E (x_2)$$

▪ معامل الارتباط

- يعرف المقدار

$$\frac{\text{Cov} (X, Y)}{\sqrt{\text{Var} (x) \text{Var} (y)}} = \rho$$

X, Y بمعامل الارتباط بين المتغيرين الإحصائيين

ويكون هذا المعامل صفراً إذا كان التباين بين X, Y يساوي صفراً.

ومعامل الارتباط يقع في المدى

$$1 \geq \rho \geq -1$$

وهكذا فإن

$$\rho^2 \leq 1$$

تمارين

الفصل الثالث

(1) إذا كان $E(x) = \mu$ فأثبت أن :

i) $E(x - \mu) = 0$

ii) $E(x - c)^2 = E(x - \mu)^2 + (\mu - c)^2$

حيث C أي ثابت .

(2) إذا كانت احتمالات أن يوجد شخص واحد أو شخصان أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 أشخاص في الدرجة الأولى للطائرة هي على الترتيب :

$$0.04 , 0.09 , 0.12 , 0.27 , 0.43 , 0.05$$

فما هو عدد الأشخاص المتوقع وجودهم في الدرجة الأولى للطائرة ؟

(3) أثبت أن المقدار $E(x - a)^2$ يكون في نهايته الصغرى عندما يكون الثابت a يساوي $E(x)$.

(4) إذا كان لدينا المتغيرين المستقلين X , Y كثافة احتمالهما هي:

$$1 \leq X \leq 0 \quad f(x) = 12 x^2 (1 - x)$$

$$1 \leq Y \leq 0 \quad f(y) = 2 Y$$

أوجد توقع المقدار

$$\frac{Y}{x^2} + \frac{x}{Y}$$

5) إذا كان X متغير عشوائي وسطه الحسابي 10 وتباينه 6 أوجد قيمة

$$E(x^2 + 3x)$$

6) الجدول التالي يعطي التوزيع الاحتمالي لعدد السيارات المباعة من قبل أحد

بائعي السيارات خلال شهر:

عدد السيارات	الاحتمال
0	0.01
10	0.05
20	0.39
30	0.45
40	0.10
المجموع	1.00

أوجد:

(i) متوسط عدد السيارات المباعة خلال الشهر.

(ii) تباين عدد السيارات المباعة خلال الشهر.

7- الجدول التالي يبين عدد التلفزيونات الملونه المباعة عادة في احد المحلات

أسبوعياً والاحتمال المناظر لكل منها:

عدد التلفزيونات	الاحتمال
0	0.13
4	0.27
6	0.39
8	0.21
40	0.07
المجموع	1.00

أوجد :

(i) متوسط المبيعات الأسبوعية

(ii) تباين الوسط الحسابي للمبيعات الأسبوعية

(8) أشتري شخص بطاقة يانصيب ، يستطيع أن يربح الجائزة الأولى وهي 4000 دينار أو الجائزة الثانية وهي 3000 دينار باحتمال 0.005 ، 0.008 على الترتيب فما هو السعر المناسب لهذه البطاقة؟

(9) ذهب شخص لشراء سياره فاذا كان سيختار السيارة A أو B أو C باحتمال 0.4 و 0.3 و 0.3 على الترتيب وكان ثمن السيارة A 2000 دينار والسيارة B 2500 دينار والسيارة C 3000 دينار فما هو المبلغ المتوقع أن يدفعه هذا الشخص؟

(10) شركة تعمل في ثلاثة مشاريع مستقلة هي A , B, C والعائدات المتوقعة للمشاريع الثلاثة هي 100.000 ، 50.000 ، 25.000 على الترتيب والتباينات هي 10.000 ، 5000 ، 3.000 دينار على الترتيب فما هو:

(i) اجمالي العائدات المتوقعة من المشاريع الثلاثة .

(ii) اجمالي التباين.

(11) إذا كانت X هي عدد الأخطاء المطبعية في صفحة وأن

$$f(0) = 0.9$$

$$f(1) = 0.05$$

$$f(2) = 0.03$$

$$f(3) = 0.02$$

فما هو عدد الأخطاء المتوقع في 200 صفحة ؟
 (12) إذا كان C ثابت و X متغير عشوائي داله احتماله

$$f(x) = cx$$

$$x = 3, 4, 5, 6$$

أوجد :

(i) قيمة الثابت C

(ii) توقع X

(iii) تباين X

(13) أثبت أن

$$\text{Cov}(x, y) = E(x y) - \mu_x \mu_y$$

(14) إذا علمت أن داله كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين y, x هي

$$1 \leq X \leq 0 \quad f(x, y) = x + y$$

$$1 \leq X \leq 0$$

أوجد

(i) تغاير y, x أي $\text{Cov}(x, y)$

(ii) معامل الارتباط y, x أي (x, y)

حل تمارين الفصل الثالث

(1)

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad E(x - \mu) &= E[(x - E(x))] = E(x) - E(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad E(x - C)^2 &= E(x^2 - 2Cx + C^2) \quad \text{- الطرف الأيسر} \\ &= E(x^2) - 2CE(x) + C^2 \\ &= E(x^2) - 2C\mu + C^2 \end{aligned}$$

- الطرف الأيمن

$$\begin{aligned} E(x - \mu)^2 + (\mu - c)^2 &= E(x^2 - 2\mu x + \mu^2) + \mu^2 - 2\mu C + C^2 \\ &= E(x^2) - 2\mu^2 + \mu^2 + \mu^2 - 2\mu C + C^2 \\ &= E(x^2) - 2\mu c + C^2 \end{aligned}$$

∴ يكون الطرفان متساويين وهو المطلوب

(2)

X = x	f(x)	x f(x)
1	0.05	0.05
2	0.43	0.86
3	0.27	0.81
4	0.12	0.48
5	0.09	0.45
6	0.04	0.25

$$\sum_{\text{all } x} xP(x) = E(X) =$$

$$= 2.89$$

وهو المطلوب

(3) يكون المقدار في نهايته الصغرى إذا كانت المشتقة الأولى له تساوي الصفر

$$E(x-a)^2 = \underbrace{E(x^2) - 2a E(x) + a^2}_Z$$

(a) بالنسبة لـ Z نشتق هذا المقدار)

$$\frac{dz}{da} = 0 - 2 E(x) + 2a$$

$$= 0 - 2a + 2a$$

$$= 0$$

حيث $a = E(x)$

∴ المقدار في نهايته الصغرى

(4)

$$\begin{aligned} E\left(\frac{Y}{X^2} + \frac{X}{Y}\right) &= E\left(\frac{Y}{X^2}\right) + E\left(\frac{X}{Y}\right) \\ &= E(Y) E\left(\frac{1}{X^2}\right) + E(X) E\left(\frac{1}{Y}\right) \end{aligned}$$

لأنهما مستقلان

الآن نجد كل توقع على حده ونعوض الناتج في المعادله أعلاه

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \int_0^1 Y f(Y) dy \\
 &= \int_0^1 Y (2Y) dy \\
 &= 2 \int_0^1 Y^2 dY \\
 &= 2 \left| \frac{Y^3}{3} \right|_0^1 \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{1}{X^2}\right) &= \int_0^1 \frac{1}{X^2} \{12 X^2 (1-X)\} dX \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{X^2} \{12 X^2 - 12 X^3\} dx \\
 &= 12 \int_0^1 (1-X) dX \\
 &= 12 \left| X - \frac{X^2}{2} \right|_0^1 \\
 &= 12 \left(\frac{1}{2} \right) \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 X \{12 X^2 (1-X)\} dX \\
&= 12 \int_0^1 X^3 - X^4 dx \\
&= 12 \left[\frac{X^4}{4} - \frac{X^5}{5} \right]_0^1 \\
&= 12 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{Y}\right) &= \int_0^1 \frac{1}{Y} (2Y) dy \\
&= \int_0^1 2 dy \\
&= 2 \\
E\left(\frac{Y}{X^2} + \frac{X}{Y}\right) &= E(Y) E\left(\frac{1}{X^2}\right) + E(X) E\left(\frac{1}{Y}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right) (6) + \left(\frac{3}{5}\right) (2) \\
&= 5.2
\end{aligned}$$

(5)

$$E(X^2 + 3X) = E(X^2) + 3 E(X) \quad \dots\dots\dots 1$$

$$\text{Var}(x) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \quad \dots\dots\dots 2$$

$$6 = E(X^2) - (10)^2$$

$$E(X^2) = 106 \quad \dots\dots\dots 3$$

نعوض 3 في 1

$$E(X^2 + 3X) = 106 + 3(10)$$

$$= 106 + 30$$

$$= 136$$

(6)

عدد السيارات X - x	f(x)=P(X=x)	X f(x)	X ² f(x)
0	0.01	0	0
10	0.05	0.50	5
20	0.039	7.80	156
30	0.45	13.50	405
40	0.10	4.00	160

$$E(x) = \sum_{\text{all } x} Xp(x)$$

$$= 25.8$$

$$E(x^2) = \sum_{\text{all } x} x^2 P(x)$$

$$= 726$$

$$\begin{aligned}
 V(x) &= E(x^2) - \{E(x)\}^2 \\
 &= 726 - 665.64 \\
 &= 60.36
 \end{aligned}$$

(7

X	P(X)	XP (X)	X ² P(x)
2	0.13	0.26	0.52
4	0.27	1.08	4.32
6	0.32	1.92	11.52
8	0.21	1.68	13.44
10	0.07	0.70	7.00

$$\begin{aligned}
 E(x) &= \sum XP(x) & E(x^2) &= \sum x^2 p(x) \\
 &= 5.64 & &= 36.80
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V(x) &= E(x^2) - \{E(x)\}^2 \\
 &= 36.80 - 31.8096 \\
 &= 4.9904 \\
 &\cong 5
 \end{aligned}$$

(8) السعر المناسب يساوي قيمة التوقع

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{\text{all } x} X P(X) \\ &= 4000 (0.005) + 3000 (0.008) \\ &= 20 + 24 \\ &= 44 \end{aligned}$$

(9) المبلغ المتوقع أن يدفعه هو توقع الأسعار الثلاثة

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{\text{all } x} XP(x) \\ &= 2000 (0.4) + 2500(0.3) + 3000(0.3) \\ &= 800 + 750 + 900 \\ &= 2450 \end{aligned}$$

(10) بما أن المشاريع مستقلة يكون إجمالي العائدات المتوقعة هو

$$\begin{aligned} \text{i) } E(X_1 + X_2 + X_3) &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) \\ &= 100000 + 50000 + 25000 \\ &= 175000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } V(X_1 + X_2 + X_3) &= V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) \\ &= 10000 + 5000 + 3000 \\ &= 18000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{عدد الأخطاء المتوقعة في الصفحة الواحدة} \\
 E(x) &= \sum_{\text{all } x} X P(X) \\
 &= 0(0.9) + 1(0.05) + 2(0.03) + 3(0.02) \\
 &= 0 + 0.05 + 0.06 + 0.06 \\
 &= 0.17
 \end{aligned}$$

عدد الأخطاء المتوقعة في 200 صفحة هو مجموع توقعات الـ 200 صفحة لأنها حوادث مستقلة

$$= 200(0.17) = 34$$

(12)

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad & \sum_{\text{all } x} f(x) = 1 \\
 & \therefore \sum C X = 1 \\
 & C \sum X = 1 \\
 & C(3 + 4 + 5 + 6) = 1 \\
 & \therefore C = \frac{1}{18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad E(x) &= \sum_{\text{all } x} X P(X) \\
 &= \sum X C X \\
 &= C \sum x^2 \\
 &= \frac{1}{18} (9 + 16 + 25 + 36)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{43}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } V(X) &= E(X^2) - \{E(x)\}^2 \\ &= E(X^2) = \sum_{\text{all } x} X^2 P(X) \\ &= C \sum X^3 \\ &= \frac{1}{18} (27 + 64 + 125 + 216) \\ &= \frac{216}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= \frac{216}{9} - \left(\frac{43}{9}\right)^2 \\ &= \frac{1944 - 1849}{81} \\ &= \frac{95}{81} \end{aligned}$$

(13) أثبت أن

$$\text{Cov}(x, Y) = E(XY) - \mu_x \mu_y$$

البرهان:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x, y) &= E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] \\ &= E(xy - x\mu_y - \mu_x y + \mu_x \mu_y) \\ &= E(xy) - \mu_x \mu_y - \mu_x \mu_y + \mu_x \mu_y \\ &= E(XY) - \mu_x \mu_y \end{aligned}$$

وهو المطلوب

$$\text{Cov}(x, y) = E(xy) - E(x) E(y)$$

∴ حتى نجد التباين لابد أن نجد أولاً توقع X وتوقع Y وتوقع XY .

حتى نحصل على $E(x)$, $E(y)$ نبحث عن $E(x+y)$

$$\begin{aligned} E(x+y) &= \int_0^1 \int_0^1 (x+y) f(x,y) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 x f(x,y) dx dy + \int_0^1 \int_0^1 y f(x,y) dx dy \\ &= \underbrace{\int_0^1 \left[x \int_0^1 f(x,y) dy \right] dx}_{E(x)} + \underbrace{\int_0^1 \left[y \int_0^1 f(x,y) dx \right] dy}_{E(y)} \\ &= \int_0^1 \left[x \int_0^1 (x+y) dy \right] dx + \int_0^1 \left[y \int_0^1 (x+y) dx \right] dy \\ &= \int_0^1 x \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 dy + \int_0^1 y \left[\frac{x^2}{2} + yx \right]_0^1 dx \\ &= \int_0^1 x \left(x + \frac{1}{2} \right) dx + \int_0^1 y \left(y + \frac{1}{2} \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{2} \right) dx + \int_0^1 \left(y^2 + \frac{y}{2} \right) dy \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{7}{12} + \frac{7}{12} \end{aligned}$$

أي أن

$$E(x) = \frac{7}{12}$$

$$E(Y) = \frac{7}{12}$$

$$f(x) = x + \frac{1}{2}$$

$$f(y) = y + \frac{1}{2}$$

الآن نحسب $E(xy)$

$$E(xy) = \int_0^1 \int_0^1 xy f(xy) dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 xy (x+y) dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x^2 y + xy^2 dx dy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 x^2 y dx \right] dy + \int_0^1 \left[\int_0^1 xy^2 dx \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left| \frac{x^3 y}{3} \right|_0^1 dy + \int_0^1 \left| \frac{xy^3}{3} \right|_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3} y dy + \int_0^1 \frac{1}{3} x dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 y dy + \frac{1}{3} \int_0^1 x dx = \frac{1}{3} \left| \frac{Y^2}{2} \right|_0^1 + \frac{1}{3} \left| \frac{X^2}{2} \right|_0^1$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(x, y) &= E(xy) - E(x) E(y) \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{49}{144} \\
 &= \frac{1}{144}
 \end{aligned}$$

(ii) لحساب معامل الارتباط لابد من حساب $V(y)$, $v(x)$

$$V(x) = E(x^2) - \{E(x)\}^2$$

$$\begin{aligned}
 E(x^2) &= \int_0^1 x^2 f(x) dx \\
 &= \int_0^1 x^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx \\
 &= \left| \frac{X^4}{4} + \frac{X^3}{6} \right|_0^1 \\
 &= \frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(x) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$$

وبنفس الطريقة نجد أن

$$V(y) = \frac{11}{144}$$

$$\rho(x, y) = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{V(x) V(y)}} = \frac{-1/144}{\sqrt{\frac{11}{144} \cdot \frac{11}{144}}} = \frac{-1/144}{11/144} = -\frac{1}{11}$$

الفصل الرابع

الفصل الرابع

التوزيعات الاحتمالية المنقطعة

THE DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS

■ مقدمة

هناك عدة توزيعات احتمالية منقطعة منها توزيع برنولي ، توزيع ثنائي الحدين، توزيع ثنائي الحدين السالب، توزيع كثير الحدود، توزيع الهيبروجيومترك وتوزيع بواسون، ولكننا سندرس في هذا الفصل فقط توزيع ثنائي الحدين وتوزيع بواسون نظرا لما لهذين التوزيعين من تطبيقات واسعة في التجارة والاقتصاد.

■ توزيع ثنائي الحدين The Binomial Distribution

في كثير من التطبيقات الاقتصادية والتجارية كثيرا ما نكون معنيين بدراسة الاختبارات التي يكون لها نتيجتين ممكنتين فقط وهما ما تدعيان عادة بالنجاح أو الفشل، مثل هذه الاختبارات تعرف بالاختبارات ثنائية الحدين ، مثل اختبار ما إذا كان أحد المصابيح الكهربائية التي ينتجها مصنع ما سليما أو معيба . ويقال للتجربة التي تتكون من عدة اختبارات ثنائية الحدين بالتجربة ثنائية الحدين مثل سؤال 100 طالب ما إذا كانوا يدخلون أم لا . ويجب أن يتحقق في أي تجربة ثنائية الحدين الشروط الأربعة التالية:

1. عدد الاختبارات محدود.
2. لكل اختبار فقط نتيجتين ممكنتين وهما النجاح أو الفشل.

3. احتمال النجاح يكون ثابت في كل الاختبارات ولا يختلف من اختبار لآخر.

4. الاختبارات مستقلة بعضها عن بعض.

من خلال المثال التالي سوف نوضح ونشتق التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي ثنائي الحدين في تجربة ثنائية الحدين وهو ما يعرف باسم التوزيع ثنائي الحدين.

مثال 1:

لو كانت n هي عدد الاختبارات في التجربة ثنائية الحدين وهي إلقاء قطعة عمله معدنية وكانت P هي احتمال الحصول على الوجه صوره (أي النجاح) و $(1-P)$ ويرمز لها بالرمز q هي احتمال عدم ظهور الوجه صوره (أي الفشل) أي هي احتمال ظهور الوجه كتابه في كل اختبار:

أولاً: لو جعلنا $n = 1$

فإن مجموعة الحالات الممكنة تكون

$$S = (\text{ص و ك})$$

حيث ص ترمز إلى الوجه صوره

ك ترمز إلى الوجه كتابه

دع X تمثل المتغير العشوائي عدد مرات ظهور الوجه صوره

فتكون القيم الممكنة لـ X هي 0 ، 1

P هي احتمال ظهور الصوره

$q = (1-P)$ هي احتمال ظهور الكتابة

فيكون التوزيع الاحتمالي للمتغير x على الشكل التالي:

جدول 1

التوزيع ثنائي الحدين

$$n = 1$$

$X = x$	$f(x) = P(X = x)$
0	$f(0) = P(\text{ك}) = q$
1	$f(1) = P(\text{ص}) = p$
المجموع	$q + p = 1$

ثانياً : لو جعلنا $n = 2$

فان مجموع الحالات الممكنة تكون

$$S = (\text{ص ص} , \text{ص ك} , \text{ك ص} , \text{ك ك})$$

حيث ص ص تعني الأولى صورة والثانية صورة

ك ك تعني الأولى كتابة والثانية كتابة

ص ك تعني الأولى صورة والثانية كتابة

ك ص تعني الأولى كتابة والثانية صورة

أي أن عدد الحالات الممكنة 4 حالات

وتكون احتمالات هذه الحالات هي

$$qq, qp, pq, pp$$

حيث أن الاختبارات مستقلة

وتكون قيم x الممكنة هي 0 ، 1 ، 2

ويكون التوزيع الاحتمالي لـ x كما في الجدول التالي:

جدول (2)
توزيع ثنائي الحدين
 $n = 2$

$X = x$	$f(x) = P(X = x)$
0	$f(0) = P(\text{ك ك}) = P(\text{ك}) P(\text{ك}) = qq = q^2$
1	$f(1) = P(\text{ص ك}) + P(\text{ك ص}) = P(\text{ص}) P(\text{ك}) + P(\text{ك}) P(\text{ص})$ $= Pq + qP = 2qP$
2	$f(2) = P(\text{ص ص}) = P(\text{ص}) P(\text{ص}) = PP = P^2$
المجموع	$q^2 + 2qP + P^2 = (q+P)^2 = 1$

ثالثاً: لو جعلنا n تساوي 3

فإن مجموعة الحالات الممكنة تكون

$$\{ \text{ص ص ص، ص ص ك، ص ك ص، ك ص ص، ص ص ك، ك ص ك، ك ك ص، ك ك ك} \}$$

$$S = \{ \text{ك، ك ك، ك ك ك} \}$$

أي أن مجموع الحالات الممكنة = 8 حالات

وتكون الاحتمالات المناظرة لهذه الحالات هي

$$qqq, qqP, qPq, qPP, Pqq, PqP, PPq, PPP$$

وتكون قيم x الممكنة هي 0، 1، 2، 3

ويكون التوزيع الاحتمالي لـ x كما في الجدول التالي:

جدول 3
توزيع ثنائي الحدين
 $n = 3$

$X = x$	$f(x) = P(X = x)$
0	$f(0) = P(ك ك ك) = P(ك) P(ك) P(ك) = q^3$
1	$f(1) = P(ك ك ص) + P(ك ص ك) + P(ص ك ك)$ $= q^2 p + q^2 p + q^2 p = 3 q^2 p$
2	$f(2) = P(ص ص ك) + P(ص ك ص) + P(ك ص ص)$ $= qp^2 + qp^2 + qp^2 = 3qp^2$
3	$f(3) = P(ص ص ص) = P(ص) P(ص) P(ص) = p^3$
المجموع	$q^3 + 3q^2p + 3qp^2 + p^3 = (q+p)^3 = 1$

نلاحظ من الجداول الثلاثة السابقة أن عدد الحالات الممكنة هو :

$$2 = 2^1 = \text{إذا كانت } n \text{ تساوي 1 فان الحالات الممكنة}$$

$$4 = 2^2 = \text{إذا كانت } n \text{ تساوي 2 فان الحالات الممكنة}$$

$$8 = 2^3 = \text{إذا كانت } n \text{ تساوي 3 فان الحالات الممكنة}$$

وبتعميم هذه النتيجة يكون عدد الحالات الممكنة بتجربة ثنائية الحدين يساوي 2^n إذا كانت التجربة مكونه من n اختبار. إذا ما استمرينا في زيادة عدد الاختبارات n فاننا بصورة عامة نستطيع أن نطبق نفس الطريقة كما في الجداول الثلاثة السابقة ولكن العمليات الحسابية ستكون طويلة ومملة ولا بد من طريقة عامة تسهل لنا ذلك.

والآن نستطيع القول بأن احتمال الحصول على الوجه صورة x مرة بالضبط في تجربة ثنائية الحدين تتكون من n اختبار (لقاء قطعة عمله) عندما يكون ترتيب الصورة والكتابة معينة أو مبينة هو احتمال وقوع الحادث (ظهور الوجه صورة) x مرة وعدم وقوعه $(n-x)$ مرة وذلك في حالات مختلفة.

احتمال وقوع الحادث (صورة) x مرة هو P^x

احتمال عدم وقوع الحادث $n-x$ مرة هو q^{n-x}

ومن قاعدة ضرب الاحتمالات يكون احتمال وقوع الحادث x مرة هو $p^x q^{n-x}$

وعدد الحالات المواتية لوقوع الحادث يمكننا حسابه بالتوافق وهو يساوي توافق x من n أي

$$C_x^n = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

وهكذا يكون الاحتمال المطلوب وهو الحصول على الوجه صورته x مرة بالضبط من n اختبار مساوياً إلى :

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

مثلاً ، لو كانت n تساوي 3 تكون احتمالات ظهور الوجه صورته 0 ، 1 ، 2 ، 3 مرات هي على التوالي :

$$(3^3) p^3 , (2^3) p^2 q , (1^3) p q^2 , (0^3) q^3$$

$$p^3 , 3p^2 q , 3p q^2 , q^3$$

وهي نفس الاحتمالات التي حصلنا عليها في جدول (3)

ويلاحظ أن القيم الناتجة عن القانون

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$x = 0, 1, \dots, n$$

هي نفسها قيم الحد x في مفكوك ثنائي الحدين

$$(q+p)^n$$

حيث

$$(q+p)^n = q^n + \binom{n}{1} p q^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \dots + \binom{n}{x} p^x q^{n-x} + \dots + \binom{n}{n-1} p^{n-1} q + p^n$$

ومن هنا جاءت تسمية هذا التوزيع الاحتمالي بالتوزيع ثنائي الحدين

وباختصار فان توزيع ثنائي الحدين هو :

التوزيع ثنائي الحدين:

هو التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع x والذي يمثل عدد مرات النجاح في n اختبار ثنائي الحدين ، ويعطي هذا التوزيع بالصيغة

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

حيث :

$$x = 0, 1, \dots, n \quad (i)$$

$$p \text{ هي احتمال النجاح في كل اختبار} \quad (ii)$$

$$q \text{ هي احتمال الفشل في كل اختبار} \quad (iii)$$

$$p + q = 1 \quad (iv)$$

مثال 2 :

طلب من أحد منتجي الكراسي (المقاعد) المدرسية أن يضع في كل غرفة دراسة بعض المقاعد الخاصة بالأعسرين (الايسرين). إذا كان يعلم أن 10% من السكان أعسرين ما هو احتمال أن غرفة لعشرين طالبا:

- (i) لا تحتوي على أي عسر
- (ii) اثنان منهم اعسران
- (iii) أكثر من اثنين منهم أعسرين

الحل: دع x تمثل عدد الاعسرين الموجودين في هذه الغرفة

تكون القيم الممكنة لـ x هي 0 ، 1 ، 2 ، ... ، 20

دع p تساوي احتمال أن يكون الفرد اعسرا

q تساوي احتمال أن لا يكون الفرد اعسرا

$$\therefore p = 0.10$$

$$q = 1 - p = 0.90$$

$$n = 20$$

$$i) \quad p = f(0) = \text{احتمال أن لا تحتوي على عسر}$$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$f(0) = \binom{20}{0} p^0 q^{20}$$

$$= (q)^{20} = (0.90)^{20}$$

$$= 0.122$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad P(\text{اثنان اعسران}) &= f(2) \\
 f(2) &= \binom{20}{2} p^2 q^{18} \\
 &= 190 (0.01)^2 (0.90)^{18} \\
 &= 190 (0.01) (0.9)^{18} \\
 &= 0.285
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iii)} \quad P(\text{اكثر من اثنين}) &= p(x > 2) = 1 - p(x \leq 2) \\
 &= 1 - \{p(x=0) + p(x=1) + p(x=2)\} \\
 &= 1 - \{(0.9)^{20} + 20(0.1)(0.9)^{19} + 0.285\} \\
 &= 1 - \{0.122 + 0.270 + 0.285\} \\
 &= 0.323
 \end{aligned}$$

■ توقع التوزيع ثنائي الحدين

بالعودة إلى المثال السابق وهو تجربة إلقاء قطعة عملة n مرة وبجعل n تساوي 1 فان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صورة معطى في الجدول (1) والتوقع لهذا التوزيع محسوب فـ يـ جـ دول

(4) التالي:

جدول (4)

توقع توزيع ثنائي الحدين

$$n = 1$$

X	f (x)	x f (x)
0	q	0
1	p	p
المجموع		$\mu = \sum_0^1 xf(x) = p$

وبجعل n تساوي 2 فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صورته معطى في الجدول (2) والتوقع (أو الوسط الحسابي) لهذا التوزيع محسوب في جدول (5) التالي:

جدول (5)

توقع توزيع ثنائي الحدين

$$n = 2$$

X	f(x)	x f (x)
0	q^2	0
1	$2pq$	$2qp$
2	p^2	$2p^2$
المجموع		$E(x) = 2p (q+p) = 2p$

وبجعل n تساوي 3 فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x هو عدد مرات ظهور الوجه صورة معطى في الجدول (3) والتوقع (أو الوسط الحسابي) لهذا التوزيع يمكن حسابه كما في جدول (6) التالي:

جدول (6)
توقع توزيع ثنائي الحدين
 $n = 3$

X	f(x)	X f (x)
0	q^3	0
1	$3p^2q$	$3q^2 p$
2	$3qp^2$	$6q p^2$
3	p^3	$3p^3$
المجموع		$\mu = E(x) = 3p(q^2 + 2qp + p^2)$ $= 3p (q + p)^2 = 3p$

وهكذا فاننا نلاحظ بأن الوسط الحسابي (أو التوقع) للتوزيع ثنائي الحدين هو :

P إذا كانت n تساوي 1

$2p$ إذا كانت n تساوي 2

$3p$ إذا كانت n تساوي 3

ويمكننا الآن أن نعمم هذه النتيجة فنقول بأن توقع التوزيع ثنائي الحدين يساوي np لـ n من الاختبارات.

- توقع التوزيع ثنائي الحدين

إذا كان p هو احتمال النجاح و q هو احتمال الفشل في كل اختبار فإن عدد مرات النجاح المتوقعة من n اختبار

ويمكننا أن نبرهن ذلك أيضاً باستخدام تعريف التوقع كما يلي

$$\begin{aligned}
 \mu = E(x) &= \sum_{x=0}^n x f(x) \\
 &= \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\
 &= \sum_{x=0}^n \frac{x n!}{x! (n-x)!} p^x q^{n-x} \\
 &= \sum_{x=1}^n \frac{n!}{(x-1)! [(n-1)-(x-1)]!} p^x q^{(n-1)-(x-1)} \\
 &= np \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)! p^{x-1} q^{(n-1)-(x-1)}}{(x-1)! [(n-1)-(x-1)]!} \\
 &= np \sum_{x=1}^n \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} q^{(n-1)-(x-1)} \\
 &= np (q+p)^{n-1} \\
 &= np
 \end{aligned}$$

مثال 3 : إذا أُلقيت قطعة نقدية 100 مرة فما هو عدد المرات المتوقعة لظهور الوجه صورة؟

الحل: دع x تمثل المتغير العشوائي وهو عدد مرات ظهور الوجه صورة وهكذا فإن x لها توزيع ثنائي الحدين بـ

$$P = \frac{1}{2}$$

$$n = 100$$

وتوقع التوزيع ثنائي الحدين $np =$

$$\mu = E(x) = np = 100 \left(\frac{1}{2} \right) = 50$$

وهو المطلوب

○ تباين التوزيع ثنائي الحدين

بالعودة إلى مثال (1) وهو تجربة إلقاء قطعة نقد n مرة وباستخدام قانون التباين $\sigma_x^2 = \sum (x - \mu)^2 f(x)$ ويجعل n تأخذ القيم 1، 2، 3 نستطيع أن نصل إلى صيغة عامة لتباين التوزيع ثنائي الحدين.

بجعل n تساوي 1 يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صورة معطى في الجدول (1) وتوقع هذا التوزيع كما حسب في الجدول (4) وهو p وأما تباين هذا التوزيع فيمكن حسابه كما في جدول (7) التالي:

جدول (7)

تباين التوزيع ثنائي الحدين

$$n = 1$$

X	f(x)	x - μ	$(x - \mu)^2 f(x)$
0	q	0-p	$q^2 q$
1	p	1-p	$(1-p)^2 p$
المجموع			$\sigma_x^2 = p^2 q + q^2 p$ $= pq (p+q) = pq$

وبجعل n تساوي 2 فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صورة معطى في جدول (2) وتوقع هذا التوزيع هو $2p$ كما حسب في جدول (5) وأما تباین هذا التوزيع فيمكن الوصول إليه كما في جدول (8) التالي:

جدول (8)

تباین التوزيع ثنائي الحدين

$$n = 2$$

X	f(x)	x - u	$(x-u)^2 f(x)$
0	q^2	-2p	$4p^2 q^2$
1	$2pq$	1-2p	$(1-2p)^2 2pq$
2	p^2	2-2p	$4(1-p)^2 p^2$
المجموع			$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= 4p^2 q^2 + (1-2p)^2 2pq + 4(1-p)^2 p^2 \\ &= 4p^2 q^2 + (1-4p+4p^2) 2pq + 4q^2 p^2 \\ &= 8p^2 q^2 + 2pq - 8p^2 q + 8p^2 q \\ &= 8p^2 q (q-1 + p) + 2p q \\ &= 8p^2 q (0) + 2p q \\ &= 2pq \end{aligned}$

وبجعل n تساوي 3 فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x وهو عدد مرات ظهور الوجه صورة معطى في جدول (3) وتوقع هذا التوزيع كما حسب في جدول (6) هو $3p$ ويمكننا بنفس الطريقة السابقة أن نصل إلى تباين هذا التوزيع يساوي $3pq$ عندما n تساوي 3 وهكذا يكون تباين التوزيع ثنائي الحدين يساوي:

$$pq \text{ عندما } n \text{ تساوي } 1$$

$$2pq \text{ عندما } n \text{ تساوي } 2$$

$$3Pq \text{ عندما } n \text{ تساوي } 3$$

ويمكننا تعميم هذه النتيجة بالقول بأن تباين التوزيع ثنائي الحدين يساوي npq لـ n اختبار

- تباين التوزيع ثنائي الحدين
إذا كان p هو احتمال النجاح و q هو احتمال الفشل في كل
اختبار فإن تباين التوزيع الاحتمالي لـ n اختبار هو

ويمكننا برهنه ذلك أيضا باستخدام قوانين التوقع والتباين كما يلي

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$\begin{aligned} E(x^2) &= \sum_{x=0}^n x^2 f(x) \\ &= \sum_{x=0}^n x^2 \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \end{aligned}$$

$$= \sum_{x=0}^n \frac{x^2 n! p^x q^{n-x}}{x! (n-x)!}$$

وبالتعويض محل x^2 بـ $x(x-1)+x$

$$= \sum_{x=0}^n \frac{[x(x-1)+x] n!}{x! (n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^n \frac{x(x-1) n!}{x! (n-x)!} p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^n \frac{x n!}{x! (n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=2}^n \frac{n(n-1)(n-2)!}{(x-2)![(n-2)-(x-2)]!} p^x q^{(n-2)-(x-2)} + E(x)$$

$$= n(n-1) p^2 \sum_{x=2}^n \frac{(n-2)!}{(x-2)![(n-2)-(x-2)]!} p^{x-2} q^{(n-2)-(x-2)} + np$$

$$= n(n-1) p^2 (q+p)^{n-2} + np$$

$$= n^2 p^2 - np^2 + np$$

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$= n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2$$

$$= np - np^2$$

$$= np(1-p)$$

$$= npq$$

وهكذا فإن $\sigma^2 = npq$

والانحراف المعياري للتوزيع ثنائي الحدين يساوي الجذر التربيعي

الموجب للتباين

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$$

مثال 4 :

بالعودة إلى مثال 3 وهو إلقاء قطعة نقد 100 مره فما هو التباين والانحراف المعياري لعدد مرات ظهور الوجه صورة؟

الحل:

دع x تمثل المتغير العشوائي وهو عدد مرات ظهور الوجه صوره وهكذا فان x لها توزيع ثنائي الحدين فيه

$$P = \frac{1}{2}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$n = 100$$

$$\sigma_x^2 = npq = \text{التباين}$$

$$= 100 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = 25$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{25} = 5$$

▪ توزيع بواسون

يستخدم توزيع بواسون في التجارب التي تكون نتيجتها وقوع الحدث موضع الاهتمام عدداً صحيحاً من المرات خلال وحده زمنية محددة (مثل الدقيقة أو الساعة أو اليوم ... الخ) أو على وحده أو منطقة محددة من الحيز (مثل الطول أو المساحة) ، بينما يستخدم توزيع ثنائي الحدين

لمعرفة عدد مرات وقوع الحدث موضع الاهتمام في عدد محدد من الاختبارات . ومن أمثلة تطبيقات توزيع بواسون:

أ) المسائل التي تحتاج إلى الانتظار أو المرتبطة بالزمن مثل :

- عدد حوادث السير في أسبوع بمدينة ما.
- عدد القطارات التي تغادر المحطة في الساعة.
- عدد المراجعين في أحد مراكز الخدمة في اليوم.
- عدد المكالمات الهاتفية التي يتلقاها الراديو تاكسي في الدقيقة.

ب) المسائل التي ترتبط بمناطق الفراغ أو الحيز مثل المسائل المرتبطة بمراقبة الجودة ومنها :

- عدد العيوب الموجودة في قطعة قماش محددة المساحة
- عدد العيوب الموجودة في سلك للهاتف طوله كيلومتران
- عدد الأخطاء المطبعية في الصفحة التي تتركبها إحدى السكرتيرات

وهكذا فإن المتغير البواسوني هو متغير متقطع يأخذ قيمة من القيم صفر أو 1 أو 2 أو ... في فترة زمنية متصلة أو في حيز أو منطقة متصلة ويجب أن يحقق الشروط الثلاثة التالية:

1- عدد مرات النجاح مستقلة في فترتين متتاليتين من الزمن أو منطقتين متصلتين من الحيز.

2- احتمال النجاح خلال فترة قصيرة من الزمن أو منطقة صغيرة من الحيز يتناسب مع طول هذه الفترة أو منطقة هذا الحيز.

3- احتمال نجاحين أو أكثر خلال فترة زمنية قصيرة أو منطقة
من الحيز صغيرة يكون صغيراً جداً بحيث يمكن إهماله.

والتوزيع الاحتمالي لمتغير بواسون العشوائي يدعى بتوزيع بواسون ويعطى حسب التعريف التالي:

- توزيع بواسون

إذا كانت X هي متغير بواسون العشوائي وان القيم الممكنة لـ X هي 0، 1، 2، ... فان التوزيع الاحتمالي لـ X يدعى بتوزيع بواسون. ويعطى بالصيغة التالية:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

حيث

$$x = 0, 1, 2, \dots$$

$$e = \text{ثابت قيمته } 2.71828$$

λ = متوسط عدد مرات النجاح في الفترة الزمنية أو نقطة الحيز المحددة وتسمى معلمة التوزيع.

مثال 5:

افترض أن متوسط عدد الزبائن في الدقيقة الذين يدخلون احد المحلات التجارية هو ثلاثة زبائن ، باستخدام توزيع بواسون أوجد احتمال ان أربعة زبائن بالضبط سيدخلون المحل خلال دقيقة معينة.

الحل:

دع x تمثل المتغير العشوائي عدد الزبائن الذين يدخلون المحل في الدقيقة فيكون x توزيع بواسوني متوسطة λ تساوي 3 . باستخدام صيغة توزيع بواسون:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$p(x=4) = f(4) = \frac{e^{-3} (3)^4}{4!}$$

$$= \frac{0.05 (81)}{24}$$

(حيث $e^{-3} = 0.05$)

$$= \frac{135}{800}$$

$$= 0.16875$$

مثال 6:

إذا كان متوسط عدد العيوب في شريحة زجاجية كبيرة هو واحد لكل 20 قدم مربع فما هو احتمال ان شريحة 3×10 قدم :

(i) لا تحتوي على عيوب.

(ii) تحتوي على عيب واحد على الأقل.

الحل:

دع x تمثل عدد العيوب في الشريحة 10×3

فيكون لـ x توزيع بواسوني معلمته هي

$$\lambda = \frac{3 \times 10}{20} = 1.5$$

أي أن متوسط عدد العيوب في الشريحة 10×3 هو 1.5

وبتطبيق صيغة بواسون:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$i) P(x=0) = f(0) = \frac{e^{-1.5} (1.5)^0}{0!} = e^{-1.5} =$$

$$0.223$$

$$ii) p(\text{عيب واحد على الأقل}) = 1 - p(x=0) =$$

$$1 - 0.223$$

$$= 0.777$$

■ توقع وتباين توزيع بواسون

إذا كانت x تمثل متغير بواسوني وبالتالي لها توزيع بواسون

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lambda > 0$$

فان توقع وتباين متغير بواسون العشوائي x يساوي معلمة التوزيع أي

يساوي λ أي أن:

$$\mu_x = E(x) = \lambda$$

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = \lambda$$

البرهان:

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{x=0}^{\infty} x f(x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \end{aligned}$$

ومن المعروف في التفاضل والتكامل أن

$$e^{\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$\therefore E(x) = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$\begin{aligned} E(x^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 f(x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x^2 e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \end{aligned}$$

بتعويض X^2 بالقيمة $X(X-1)+X$ ينتج

$$\begin{aligned}
&= \sum_0^{\infty} \frac{[x(x-1) + x] e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\
&= \sum_0^{\infty} \frac{[x(x-1) e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} + \sum_0^{\infty} \frac{x e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\
&= \sum_2^{\infty} \frac{x e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-2)!} + E(x) \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_2^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

$$\text{var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$= (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2$$

$$= \lambda$$

تمارين

الفصل الرابع

1) صندوق بداخله 20 مصباحاً كهربائياً منها 5 تالفة ، سحبنا 4 مصابيح بطريقة عشوائية مع الإعادة أحسب احتمال :

i) الحصول على مصباح واحد معيب (تالف) $(27/64)$

ii) الحصول على مصباح واحد على الأقل معيب (تالف) $(175/256)$

2) إذا كان الامتحان يتكون من 10 أسئلة وكان احتمال أن يجيب الطالب على أي سؤال عشوائي هو 0.2 أوجد الاحتمالات التالية:

i) احتمال ألا يجيب الطالب على أي سؤال (0.1074)

ii) أن يجيب على سؤال أو أكثر (0.8926)

iii) أن يجيب على 3 أسئلة فقط (0.2)

3) إذا كان 0.15 من إنتاج إحدى الشركات من التلفزيونات الملونه معيبا ، شحن 15 جهازا إلى أحد العملاء . فإذا اعتبرنا كل جهاز تجربة مستقلة فما هو احتمال :

i) أن لا يكون من بين الشحنه أي تلفزيون معيب (0.0873)

ii) أن يكون واحدا أو أقل معيبا (0.3185)

(4) إذا القينا حجر النرد 4 مرات وكانت k تمثل عدد مرات ظهور الوجه ستة في هذه الرميات الأربع أوجد التوزيع الاحتمالي لـ k .

(5) أسره لديها 5 أطفال فإذا كان احتمال أن يكون الطفل ولدا يساوي احتمال أن يكون بنتا ويساوي $1/2$ ، فما هو احتمال :

(i) أن يكون جميع الأطفال من نفس الجنس $(1/16)$

(ii) أن يكون لدى الأسرة على الأقل ولدا واحدا وبنتا واحدة $(15/16)$

(6) عليّة من بذور الورد ثلثها يعطي ورداً أحمرًا والباقي يعطي وردا أبيضاً ، فإذا زرعنا 7 بذرات من هذه العلبة فأحسب احتمال :

(i) أن لا نحصل على أي ورده حمراء $(128/2187)$

(ii) أن نحصل على ورده واحد حمراء $(448/2187)$

(iii) أن لا نحصل على أي ورده بيضاء $(1/2187)$

(7) إذا كان في المتوسط هاتفًا واحدًا من بين كل 4 هواتف يكون مشغولاً في منطقة تجارية في مدينة ما بين الساعة الحادية عشرة وساعة الثانية عشرة وان تسعة أرقام عشوائية طلبت في ذلك الوقت أوجد احتمال :

(i) أن جميع الهواتف المطلوبة غير مشغولة (0.075)

(ii) أن واحدا فقط مشغولا (0.225)

(iii) أن اثنين أو أكثر من الهواتف المطلوبة مشغولة (0.700)

8) شخصان ألقى كل منهما قطعة نقد خمس مرات إحصب احتمال أنهما حصلاً على نفس العدد من الصور.
(63/256)

9) إذا كان احتمال التهديد للاعب كره سلة في كل رمية هو $1/5$ فما هو احتمال الحصول على 4 أهداف على الأقل من 25 رميه.
(0.766)

10) في أحد الامتحانات الشفوية احتمال أن تجيب نوال على سؤال اجابه صحيحة هو $1/3$ فما هو احتمال أن يكون السؤال الخامس هو أول سؤال تجيب عليه إجابة صحيحة (16/243).

11) افترض أن 0.30 من الطلبة يدخنون ، اختيرت عينه عشوائية من 6 أشخاص ، ما هو احتمال أن اثنين منهم على الأقل يدخنون؟ (0.58)

12) إذا كانت درجة الثقة في الترانزيتور هي 0.90 . راديو به 10 ترانزيتورات ، ما هو احتمال وقوع خلل
(0.6513)

13) أوجد قيم المعلمات n , p للتوزيع ثنائي الحدين الذي وسطه 9 وتباينه $18/5$ ($n = 15$ ، $p = 3/5$)

14) أوجد كل من توقع وتباين التوزيع ثنائي الحدين الذي فيه $p = 0.2$ ،

$$n = 35$$

$$(\mu = 7 \quad \sigma^2 = 5.6)$$

15) كتاب مؤلف من 232 صفحة ، به 232 خطأ مطبعي موزعه عشوائيا أحسب احتمال ان صفحة ما :

(i) بها بالضبط خطأين $(e^{-1/2} = 0.1839)$

(ii) بها أقل من خطأين $(2e^{-1} = 0.7356)$

16) إذا كان متوسط عدد حوادث العمل في مصنع ما هو 4 حوادث شهريا فما هو احتمال :

(i) أن لا يقع أي حادث في شهر معين $(e^{-4} = 0.018)$

(ii) ان يقع ثلاثة حوادث على الأكثر في شهر معين (0.426)

17) إذا كان متوسط عدد المراجعين في أحد مراكز الخدمة هو اثنان كل خمس دقائق وإذا كان عدد المراجعين يتبع توزيع بواسون، فما هو احتمال:

- (i) أن لا يصل أي مراجع خلال خمس دقائق ($e^{-2} = 0.135$)
(ii) أن أكثر من 4 مراجعين وصلوا خلال 10 دقائق (0.382)

18) ما هو احتمال أن يتلقى أحد السنترالات أربع مكالمات هاتفية خلال دقيقتين إذا كان متوسط عدد المكالمات الهاتفية التي تصل السنترال هو مكالمتان في الدقيقتين؟
(0.09)

- 19) إذا كان متوسط عدد الأخطاء المطبعية التي ترتكبها إحدى السكرتيرات هو 4 أخطاء في الصفحة ، فما هو احتمال:
(i) أن تطبع صفحة بدون أخطاء ($e^{-4}=0.018$)
(ii) أن ترتكب خطأين على الأقل في كتابة أحد الصفحات (0.91)

- 20) إذا كان متوسط عدد العيوب في شريحه زجاجية كبيره هو واحد لكل عشرة أقدام مربعة فما هو احتمال أن شريحه 6×10 قدم:-
(i) سوف تكون بدون عيوب ($e^{-6}=0.0025$)
(ii) سيكون بها على الأقل عيب واحد (0.9975)

- 21) في مصنع لإنتاج أشرطة التسجيل تحدث شروخ في الأشرطة المنتجة عشوائياً بمتوسط شرخ كل 200 متر أحسب احتمال أن يكون في شريط طوله 500 متر.
(i) شرخين على الأكثر (0.543)
(ii) على الأقل ثلاث شروخ (0.457)

- (22) تحدث عيوب في تغطيه رقائق من الصلب بالكروم بمعدل واحد في كل 2م^2 ، ما احتمال أن تكون رقيقه أبعادها $3\text{م} \times 7\text{م}$.
- (i) خاليه من العيوب (0.00001)
- (ii) بها على الأكثر عيب واحد (0.0001266)

حل تمارين الفصل الرابع

(1) دع المتغير x يدل على عدد المصابيح التالفة المسحوبة

فتكون قيم x الممكنة هي 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 .

دع p تمثل احتمال سحب مصباح تالف عندئذ $p = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

المتغير x هنا ثنائي الحدين وذلك لان السحب يتم بالإعادة
وا احتمال سحب مصباح تالف لا يتغير من اختبار إلى آخر بل

ثابت ويساوي $\frac{1}{4}$

$$n = 4 \quad (i)$$

$$x = 1$$

$$p = \frac{1}{4}$$

$$q = \frac{3}{4}$$

وباستخدام صيغة التوزيع ثنائي الحدين نحصل على :

$$\begin{aligned} P(x=1) &= f(1) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ &= \frac{4!}{1! 3!} \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ &= 4 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{27}{64}\right) \\ &= \frac{27}{64} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}P(x \geq 1) &= p(x=1) + p(x=2) + p(x=3) + p(x=4) \\&= 1 - p(x=0) \\&= 1 - \binom{4}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \\&= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 \\&= 1 - 81/256 = 175/256\end{aligned}$$

(2) د x تمثل عدد الأسئلة التي يجيب عليها الطالب فتكون قيم x

الممكنة هي $0, 1, \dots, 10$

وهكذا

$$n = 10$$

$$p = 0.2$$

$$q = 0.8$$

وباستخدام صيغته التوزيع ثنائي الحدين

$$i) \quad f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$p(x=0) = f(0) = \binom{10}{0} (0.2)^0 (0.8)^{10}$$

$$= (0.8)^{10}$$

$$= 0.1074$$

$$\text{ii) } p(x \geq 1) = f(1) + f(2) \dots + f(10)$$

$$= 1 - f(0)$$

$$= 1 - (0.8)^{10}$$

$$= 0.8926$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } p(x = 3) &= f(3) = \binom{10}{3} (0.2)^3 (0.8)^7 \\ &= 120 (0.008) (0.8)^7 \\ &= 0.2013 \\ &\cong 0.2 \end{aligned}$$

3) دع x تمثل عدد الأجهزة المعيبة المشحونه للعميل . فتكون قيم x الممكنة هي 0 ، 1 ، 2 ، ... ، 15

$$\text{احتمال أن يكون الجهاز معيبا} \quad p = 0.15$$

$$\text{احتمال أن يكون الجهاز سليما} \quad q = 0.85$$

$$n = 15$$

$$\begin{aligned} \text{i) } p(x = 0) &= f(0) = \binom{15}{0} (0.15)^0 (0.85)^{15} \\ &= (0.85)^{15} \\ &= 0.0873 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } p(x \leq 1) &= p(x = 0) + p(x = 1) \\ &= f(0) + f(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{15}{0} (0.15)^0 (0.85)^{15} + \binom{15}{1} (0.15)^1 (0.85)^{14} \\
&= 0.0873 + 15 (0.15) (0.85)^{14} \\
&= 0.0873 + 0.2312 \\
&= 0.3185
\end{aligned}$$

(4) القيم الممكنة لـ k هي :

0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4

$$n = 4$$

احتمال الحصول على الوجه ستة $p = \frac{1}{6}$

$$q = \frac{5}{6}$$

$$p(K = k) = f(k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$$

والجدول التالي يعطي التوزيع الاحتمالي للمتغير K

القاء حجر النرد 4 مرات

K	P_k	P_k
0	$(5/6)^4$	0.4823
1	$4(1/6) (5/6)^3$	0.3858
2	$6(1/6)^2 (5/6)^2$	0.1157
3	$4(1/6)^3 (5/6)$	0.0154
4	$(1/6)^4$	0.0008

(5) دع x تمثل عدد الأولاد من بين الأطفال فتكون قيم x الممكنة هي

$$0, 1, \dots, 5$$

$$n = 5$$

$$\text{احتمال أن يكون الطفل ولدا} \quad p = \frac{1}{2}$$

$$\text{احتمال أن يكون الطفل بنتا} \quad q = \frac{1}{2}$$

i)

احتمال أن يكون لدى الأسرة ولدا واحدا وبنتا واحده على الأقل هو احتمال أن يكون لديها ولد أو اثنين أو ثلاثة أو أربعة ، أي أن لا يكون لديها 5 أولاد أو 5 بنات.

فيكون الاحتمال المطلوب يساوي

$$\begin{aligned} P &= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) \\ &= \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \\ &= \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} = \frac{15}{16} \end{aligned}$$

أو

الاحتمال المطلوب = $1 - (\text{احتمال الخمسة اولاد} + \text{احتمال الخمسة بنات})$

$$\begin{aligned} &= 1 - [P(5) + P(0)] \\ &= 1 - \left[\frac{1}{32} + \frac{1}{32} \right] = \frac{15}{16} \end{aligned}$$

ii)

الاحتمال المطلوب يساوي احتمال كلهم أولاد + احتمال كلهم بنات

$$P = P(0) + P(5) \\ = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16}$$

(6) دع x تمثل عدد الوردات الحمراء التي تحصل عليها من زرع 7

بذرات ، فتكون قيم x الممكنة هي 0 ، 1 ، 2 ، ... ، 7

دع p احتمال الحصول على ورده حمراء

q احتمال عدم الحصول على ورده حمراء

$$p = \frac{1}{3}$$

$$q = \frac{2}{3}$$

$$\text{i) } p(0) = f(0) = \binom{7}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^7 \\ = \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{128}{2187} = 0.05853$$

$$\text{ii) } p(1) = f(1) = \binom{7}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \\ = 7 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{448}{2187} = 0.2048$$

$$\text{iii) } p(7) = f(7) = \binom{7}{7} \left(\frac{1}{3}\right)^7 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \\ = \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{2187} = 0.0005$$

(7) دع x تمثل عدد الهواتف المشغولة ، فتكون قيم x الممكنة هي 0 ،

1 ، 2 ، ... ، 9

$$n = 9$$

$$p = \frac{1}{4}$$

$$q = \frac{3}{4}$$

(i) احتمال أن جميع الهواتف المطلوبة غير مشغولة هو احتمال أن يكون صفر منها مشغولاً

$$\begin{aligned} P(x=0) &= f(0) = \binom{9}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^9 \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^9 \\ &= 0.075 \end{aligned}$$

(ii) احتمال أن واحدا فقط مشغولا

$$\begin{aligned} P(x=1) &= f(1) = \binom{9}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^8 \\ &= 0.225 \end{aligned}$$

(iii) احتمال أن اثنين أو أكثر مشغولة

$$\begin{aligned} P(x \geq 2) &= p(x=2) + p(x=3) + \dots + p(x=9) \\ &= 1 - [p(x=0) + p(x=1)] \\ &= 1 - 0.075 - 0.225 \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

(8) د ع x تمثل عدد مرات الحصول على وجه الصورة عند اللقاء قطعه عمله 5 مرات ، فتكون قيم x الممكنة لكل شخص هي

$$5 \dots 2, 0, 1$$

$$n = 5$$

$$p = q = 1/2$$

يحصلان على نفس العدد من الصور إذا حصل كل منهما على صفر أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أي

$$(5 \text{ و } 5) \text{ أو } (4 \text{ و } 4) \text{ أو } (3 \text{ و } 3) \text{ أو } (2 \text{ و } 2) \text{ أو } (1 \text{ و } 1) \text{ أو } (0 \text{ و } 0)$$

احتمال الحصول على كل حالة من هذه الحالات يساوي

$$\left[\binom{5}{x} \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right]^2$$

فمثلاً

$$(0, 0) = P(0) p(0)$$

$$= \left[\left\{ \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2} \right)^0 \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right\} \left\{ \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2} \right)^0 \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right\} \right]$$

$$= \left[\binom{5}{0} \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right]^2$$

∴ احتمال أن يحصلوا على نفس العدد من الصور هو

$$P = \left[\left\{ \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right\}^2 + \left\{ \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right\}^2 + \left\{ \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right\}^2 + \left\{ \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right\}^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right\}^2 + \left\{ \binom{5}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right\}^2 \right] \\
& = \left(\frac{1}{2^{10}} \right) + 25 \left(\frac{1}{2^{10}} \right) + 100 \left(\frac{1}{2^{10}} \right) + 100 \left(\frac{1}{2^{10}} \right) + 25 \left(\frac{1}{2^{10}} \right) + \left(\frac{1}{2^{10}} \right) \\
& = \frac{252}{2^{10}} = \frac{252}{1024} = \frac{63}{256}
\end{aligned}$$

(9) دع x تمثل عدد الأهداف المتحققه من 25 رميه ، فتكون قيم x

الممكنة هي 0 ، 1 ، ... ، 25

$$q = \frac{4}{5} \quad , \quad p = \frac{1}{5} \quad , \quad n = 25$$

احتمال الحصول على أربعة أهداف على الأقل هو احتمال

الحصول على أربعة أهداف أو أكثر وهو

$$\begin{aligned}
P &= (x=4) + p(x=5) + \dots + p(x=25) \\
&= 1 - [p(x=0) + p(x=1) + p(x=2) + p(x=3)] \\
&= 1 - \left[\binom{25}{0} \left(\frac{1}{5} \right) \left(\frac{4}{5} \right)^{25} + \binom{25}{1} \left(\frac{1}{5} \right) \left(\frac{4}{5} \right)^{24} + \binom{25}{2} \left(\frac{1}{5} \right)^2 \left(\frac{4}{5} \right)^{23} \right. \\
&\quad \left. + \binom{25}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^3 \left(\frac{4}{5} \right)^{22} \right] \\
&= 1 - (0.0037777 + 0.0236110 + 0.0708336 + 0.1357644) \\
&= 0.766
\end{aligned}$$

(10) احتمال أن يكون السؤال الخامس هو أول سؤال يجاب عليه

إجابة صحيحة هو احتمال أن يجاب على الأسئلة الأربعة الأولى

بإجابات خاطئة ويجب على السؤال الخامس إجابة صحيحة
ويساوي:

$$p = \left[\binom{4}{0} \left(\frac{1}{3} \right)^0 \left(\frac{2}{3} \right)^4 \right] \left[\binom{1}{1} \left(\frac{1}{3} \right)^1 \left(\frac{2}{3} \right)^0 \right]$$

$$= \left(\frac{2}{3} \right)^4 \frac{1}{3} = \frac{16}{3^5} = \frac{16}{243}$$

أو

$$P = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{16}{243}$$

(11) دع x تمثل عدد المدخنين فتكون قيم x الممكنة هي: 0 ، 1 ، ... 6

احتمال أن يكون الطالب مدخنا هو احتمال النجاح = p 0.30

احتمال أن يكون الطالب غير مدخن هو احتمال الفشل = q 0.70

$$6 = n$$

احتمال أن اثنين من العينة على الأقل مدخنون هو احتمال ان يكون عدد المدخنين 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 هو

$$P(x \geq 2) = 1 - p(x < 2)$$

$$= 1 - [p(x = 0) + p(x = 1)]$$

وهكذا

$$\begin{aligned}
 P &= 1 - \left[\binom{6}{0} (0.3)^0 (0.7)^6 + \binom{6}{1} (0.3)^1 (0.7)^5 \right] \\
 &= 1 - (0.117649 + 0.302526) \\
 &= 0.579825
 \end{aligned}$$

(12) يقع الخلل إذا اختل أو تلف ترانزيتور واحد على الأقل دع x تمثل المتغير عدد الترانزيتورات التالفة وتكون قيم x الممكنة هي

$$(0, 1, 2, \dots, 10)$$

احتمال النجاح = احتمال وقوع خلل $0.1 = p$

احتمال الفشل = احتمال عدم وقوع خلل $0.9 = q$

$$10 = n$$

احتمال وقوع خلل = واحد ناقص احتمال عدم وقوع خلل = واحد ناقص احتمال أن تكون كلها تعمل

$$\begin{aligned}
 P &= 1 - \binom{10}{0} (0.1)^0 (0.9)^{10} = 1 - (0.9)^{10} \\
 &= 0.6513
 \end{aligned}$$

(13) الوسط الحسابي أو التوقع للتوزيع ثنائي الحدين يساوي np

والتباين للتوزيع ثنائي الحدين يساوي npq

$$np = 9 \dots\dots\dots (1)$$

$$npq = \frac{18}{5} \dots\dots\dots (2)$$

بتعويض (1) في (2)

$$9q = \frac{18}{5}$$

$$q = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$$

$$p = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

بتعويض قيمة P في (1)

$$n = 9 \div \frac{3}{5} = \frac{45}{3} = 15$$

(14

$$n = 35$$

$$p = 0.2$$

$$q = 0.8$$

$$np = \text{التوقع}$$

$$npq = \text{التباين}$$

$$\mu = np$$

$$\therefore \mu = 35 (0.2) = 7$$

$$\sigma^2 = npq$$

$$\sigma^2 = 7 (0.8) = 5.6$$

(15) دع x تمثل عدد الأخطاء في الصفحة الواحدة ، فيكون لـ x توزيع

بواسون بمتوسط خطأ واحد في كل صفحة

$$\lambda = \frac{232}{232} = 1$$

(i)

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$p(x=2) = f(2) = \frac{e^{-1} (1)^2}{2!}$$

$$= e^{-1}/2 = 0.1839$$

حيث

$$e^{-1} = 0.368$$

(ii)

$$P(x < 2) = \sum_{x=0}^1 \frac{e^{-1} (1)^x}{x!}$$

$$= e^{-1} \left(1 + \frac{1}{1!}\right)$$

$$= 2 e^{-1}$$

$$= 0.736$$

16) دع x تمثل عدد الحوادث في الشهر المعين فيكون لها توزيع بواسون

الذي معلمته $4 =$

(i)

$$f(0) = \frac{e^{-4} (4)^0}{0!}$$

$$= e^{-4}$$

$$= 0.018$$

(ii)

$$P(x \leq 3) = \sum \frac{e^{-\lambda} (\lambda)^x}{x!}$$

$$= p(x = 0) + p(x = 1) + p(x = 2) + p(x = 3)$$

$$f(0) = e^{-4} = 0.018$$

$$f(1) = \frac{e^{-4} 4}{1!} = 0.072$$

$$f(2) = \frac{e^{-4} (4)^2}{2!} = 0.144$$

$$f(3) = \frac{e^{-4} (4)^3}{3!} = 0.192$$

$$f(x \leq 3) = 0.426$$

(17) دع x هي المتغير وهي عدد المراجعين

$$\lambda = \frac{2}{5} = \text{متوسط عدد المراجعين في الدقيقة}$$

$$2 = \text{متوسط عدد المراجعين في 5 دقائق}$$

$$4 = \text{متوسط عدد المراجعين في 10 دقائق}$$

$$\therefore \lambda = 2 \text{ في خمس دقائق}$$

$$\lambda = 4 \text{ في عشر دقائق}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } P(x = 0) &= f(0) = \frac{e^{-2} 2^0}{0!} \\ &= e^{-2} \\ &= 0.135 \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \lambda = 4 \quad P(x > 4) = 1 - P(x \leq 4)$$

$$P(x \leq 4) = \sum_{x=0}^4 \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$= P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) + P(x=4)$$

$$f(0) = e^{-4} = 0.018$$

$$f(1) = e^{-4} (4) = 0.072$$

$$f(2) = \frac{e^{-4} (4)^2}{2!} = 8 e^{-4} = 0.144$$

$$f(3) = e^{-4} \left(\frac{64}{6} \right) = 0.192$$

$$f(4) = \frac{e^{-4} (4)^4}{4!} = \frac{64}{6} e^{-4} = 0.192$$

$$0.618$$

$$\therefore P(x > 4) = 1 - P(x \leq 4)$$

$$= 1 - 0.618$$

$$= 0.382$$

18) دع x تمثل المتغير عدد المكالمات الهاتفية التي تصل خلال دقيقتين

فيكون لها توزيع بواسون بمعلمه $\lambda = 2$

$$P(x = 4) = f(4) = \frac{e^{-2} 2^4}{4}$$

$$= \frac{2}{3} e^{-2}$$

$$= \frac{2(0.135)}{3} = \frac{270}{3}$$

$$= 0.090$$

(19) دع x تمثل المتغير عدد الأخطاء المرتكبة في الصفحة فيكون

لـ x توزيع بواسون بمعلمه $\lambda = 4$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad P(x=0) &= f(0) = \frac{e^{-2} 2^4}{0!} \\ &= e^{-4} = 0.018 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad P(x \geq 2) &= 1 - P(x < 2) \\ &= 1 - [P(X=0) + (P(X=1))] \\ &= 1 - (0.018 + 4 e^{-4}) \\ &= 1 - (0.018 + 0.072) \\ &= 0.91 \end{aligned}$$

(20) دع x تمثل عدد العيوب في الشريحة 10×6 قدم

يكون لـ x توزيع بواسون الذي معلمته $\lambda = \frac{(6)(10)}{10}$

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad P(x=0) &= f(0) = e^{-6} = \\ &0.0025 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii)} \quad P(x \geq 1) &= 1 - P(x < 1) \\
&= 1 - P(x = 0) \\
&= 1 - f(0) \\
&= 1 - 0.0025 = 0.9975
\end{aligned}$$

(21) دع x تمثل عدد الشروخ في الـ 500متر

$$2.5 = \frac{500}{200} = \lambda \quad \therefore$$

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$\text{i)} \quad P(x \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2)$$

$$f(0) = e^{-2.5}$$

$$f(1) = e^{-2.5}$$

$$f(2) = \frac{e^{-2.5} (2.5)^2}{2} = 3.126 e^{-2.5}$$

$$P(x \leq 2) = 6.625 e^{-2.5} = (6.625) (0.082) = 0.543$$

$$\text{ii)} \quad P(x \geq 3) = 1 - P(x < 3)$$

$$= 1 - \{f(0) + f(1) + f(2)\}$$

$$= 1 - 0.543$$

$$= 0.457$$

(22) د ع x تمثل عدد العيوب في الرقيقة 7 × 3 م

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad 11.5 = \frac{21}{2} = \lambda$$

i) $P(x = 0) = f(0) = e^{-11.5} = 0.00001$

ii) $P(x \leq 1) = f(0) + f(1)$

$$f(1) = e^{-11.5} 11.5$$

$$f(0) + f(1) = 12.5 e^{-11.5} = 0.0001266$$

الفصل الخامس

الفصل الخامس

التوزيع الطبيعي

The Normal Distribution

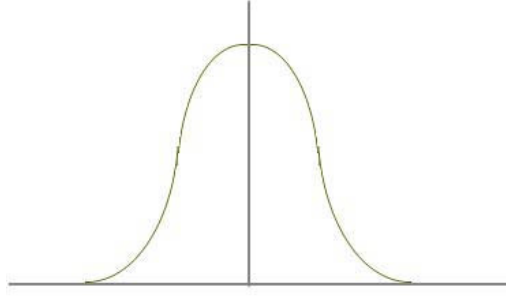
يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية وأكثرها استعمالاً على الإطلاق ، بل انه يحتل موضع الصدارة في الاحتمالات والاحصاء ، وقد اشتق اسمه من أن كثيراً من التوزيعات "الطبيعية" تأخذ شكلاً قريباً منه ، كذلك فإن معظم التوزيعات البيومترية (كتوزيعات الطول والوزن) وتوزيعات أخطاء المشاهدات (الفروق بين القيم الحقيقية والقيم المشاهدة) تأخذ شكلاً قريباً منه ، ويستخدم هذا التوزيع في كثير من التجارب الصناعية واختبارات الجودة وله استخدامات واسعة في اختبارات الفروض والعينات الكبيرة وتوزيعات المعاينة وغيرها.

كان أول من اكتشف هذا التوزيع العالم دي موافر De Moivre عام 1733 ومن بعده العالم غوس Gauss في عام 1809 ويعرف هذا التوزيع أيضاً باسمه أي توزيع غوس Gauss Distribution ولهذا التوزيع خواصه الرياضية ويمكن ان يكون تقريباً أو حالة خاصة لتوزيعات أخرى مثل توزيع ثنائي الحدين.

منحنى هذا التوزيع يدعى بالمنحنى الطبيعي ، وعندما نتكلم عن منحنى توزيع نظري فأنا نقصد منحنى دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي الذي له هذا التوزيع ، ومنحنى التوزيع الطبيعي متماثل حول خط رأسي يمر بالوسط الحسابي الذي يساوي بسبب التماثل كلا من الوسيط والموال. وهو ناقوسي الشكل له قمة واحدة ويمتد طرفاه إلى ما لا

نهاية يميناً ويساراً (فيقترب طرفاه من المحور الأفقي ولكنهما لا يلتقيان معه) ومع ذلك فإن المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح كما هو الحال في المساحة تحت منحنى داله كثافة احتمال أي متغير عشوائي متصل آخر.

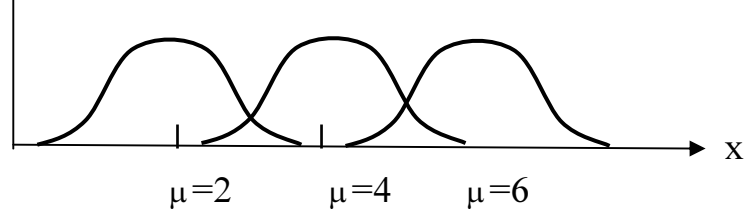
والشكل 1 يمثل المنحنى :



شكل 1

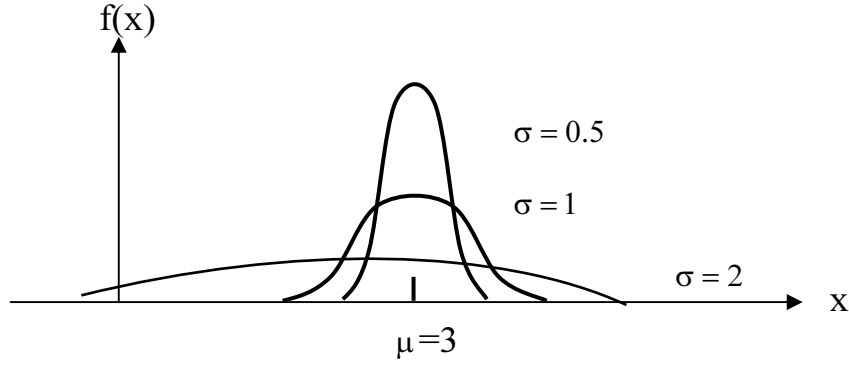
التوزيع الطبيعي

هناك عدد لا نهائي من المنحنيات الطبيعية ولكنها تختلف عن بعضها البعض حسب قيمة كل من الوسط الحسابي (التوقع) μ والانحراف المعياري σ ، وقد تتفق منحنيات طبيعية في الانحراف المعياري ولكنها تختلف في الوسط الحسابي كما هو في الشكل 2 ، أو قد تتفق بالوسط الحسابي وتختلف بالانحراف المعياري كما هو في الشكل 3



شكل 2

منحنيات طبيعية لها نفس الانحراف المعياري مع اختلاف الوسط الحسابي



شكل 3

منحنيات طبيعية لها نفس الوسط الحسابي مع اختلاف الانحراف المعياري

بعض خواص المنحنى الطبيعي

- 1) المنحنى الطبيعي متماثل حول الوسط الحسابي μ أي أن المنحنى على يسار الوسط الحسابي يماثل المنحنى على يمينه.
 - 2) الوسط الحسابي في المنتصف ويقسم المساحة تحت المنحنى إلى قسمين متساويين.
 - 3) مجموع المساحة تحت المنحنى تساوي واحد.
 - 4) مهما كانت قيمة μ و σ فإن للمنحنى الطبيعي الخواص التالية:
- أ- حوالي 68.26% من المساحة يقع بين القيمتين $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$

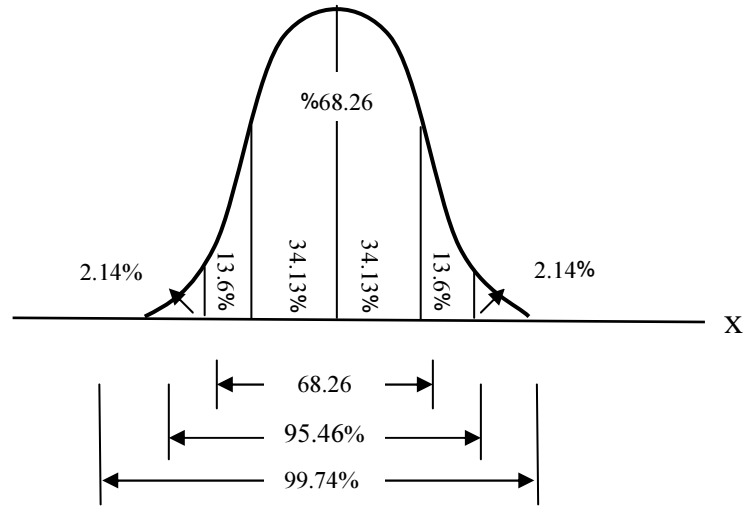
ب- حوالي 95.46% من المساحة يقع بين القيمتين $\mu - 2\sigma$ و $\mu + 2\sigma$

ج- حوالي 99.74% من المساحة يقع بين القيمتين $\mu - 3\sigma$ و $\mu + 3\sigma$

د- حوالي 95% من المساحة يقع بين القيمتين $\mu - 1.96\sigma$ و $\mu + 1.96\sigma$

هـ- حوالي 99% من المساحة يقع بين القيمتين $\mu - 2.58\sigma$ و $\mu + 2.58\sigma$

كما هو موضح في الشكل 4 التالي:



يقال للمتغير العشوائي المتصل X بأنه موزع طبيعياً إذا كانت دالة كثافة الاحتمال له معطاه بالصيغة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

حيث

$$-\infty < x < \infty$$

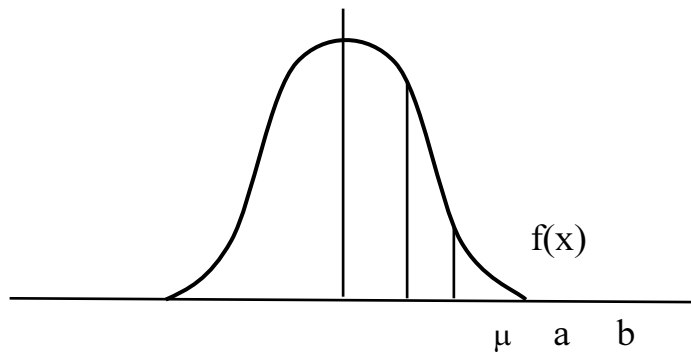
μ هي الوسط الحسابي للمتغير الطبيعي

e ثابت قيمته 2.71828

π هي النسبة التقريبية وتساوي 3.14159

ويكتب التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي μ وتباينه σ^2 (فيكون انحرافه المعياري يساوي σ) يكتب بالرمز $N(\mu, \sigma^2)$ فمثلا $N(20,4)$ تعني متغيراً طبيعياً له وسط حسابي (توقع) يساوي 20 وتباين يساوي 4 (أي انحراف معيار يساوي 2).

بما أن $f(x)$ دالة كثافة احتمال يكون مجموع المساحة تحت منحنى هذه الدالة مساوياً لواحد صحيح واحتمال أن متغيراً عشوائياً متصلاً وسطه μ وتباينه σ^2 يقع بين قيمتين محددتين مثل a , b هو $(a < x < b)$ ويساوي المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والقيمتين $x = a$, $x = b$.



▪ التوزيع الطبيعي القياسي أو المعياري The Standard Normal

Distribution

يطلق اسم المتغير الطبيعي المعياري أو القياسي على المتغير الطبيعي الذي وسطه الحسابي صفر وتباينه واحد أي على المتغير $N(0,1)$ ويرمز له بالرمز z وتكون داله كثافة احتمالته هي

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

$$-\infty < z < \infty$$

وبما أن $f(z)$ داله كثافة احتمال فان مجموع المساحة تحت منحنى $f(z)$ تساوي 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = 1$$

ويكون احتمال وقوع المتغير العشوائي الطبيعي المعياري z بين القيمتين $z = a$ ، $z = b$ هو المساحة المحصورة بين منحنى داله كثافة الاحتمال $f(z)$ والقيمتين المحددتين $z = a$ ، $z = b$ أي يساوي

$$P(a < z < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

لقد حسبت المساحة (أو الاحتمالات) تحت المنحنى الطبيعي المعياري وهي معطاه في الجدول 2 بالمحلق.

لحساب احتمال وقوع المتغير الطبيعي المتصل بين قيمتين محددين علينا أن نحسب المساحة المحصورة بين منحنى داله كثافة الاحتمال $f(x)$ والقيمتين المحددتين لـ X ولما كانت $f(x)$ تتضمن معلمتين هما الوسط

الحسابي μ والتباين σ^2 وهما ما يمكنهما أن يأخذا قيما غير محدوده وإن المتغير العشوائي متغير متصل وبالتالي يمكنه أن يأخذ هو أيضاً قيما غير محدوده داخل أي مدى فإنه من غير الممكن حساب المساحات الواقعه تحت المنحنى الطبيعي لقيم مختلفه لكل من μ , σ^2 , x ولكننا نستطيع التغلب على هذه الصعوبة بتحويل المتغير الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ إلى متغير معياري $N(0.1)$ وهو ما يمكن حساب المساحه تحت منحناه وهي معطاه كما أسلفنا في الجدول 2 بالملحق.

تحويل المتغير الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ إلى المتغير الطبيعي القياسي

N(0.1)

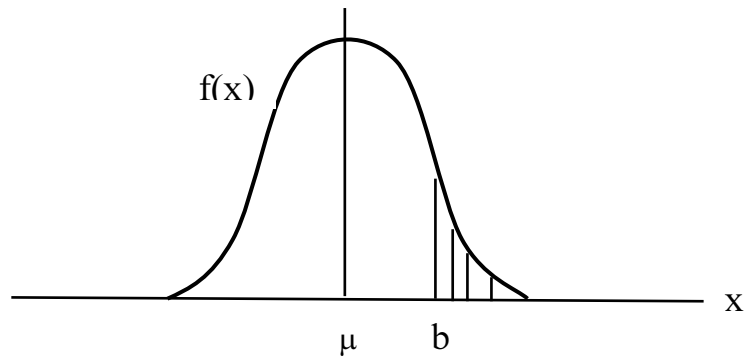
إذا كان المتغير العشوائي x له التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فإن المتغير العشوائي $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ يكون له التوزيع الطبيعي المعياري $N(0.1)$ أي يكون له توزيعاً طبيعياً معيارياً وسطه الحسابي صفر وتباينه 1 وان أي متغير طبيعي وسطه الحسابي μ وتباينه σ^2 يمكن تحويله إلى متغير طبيعي معياري بكتابه $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ وبهذا يتحول التوزيع الطبيعي إلى توزيع طبيعي معياري يمكن حساب المساحة المحصوره تحت منحناه كما في الشكل 6.

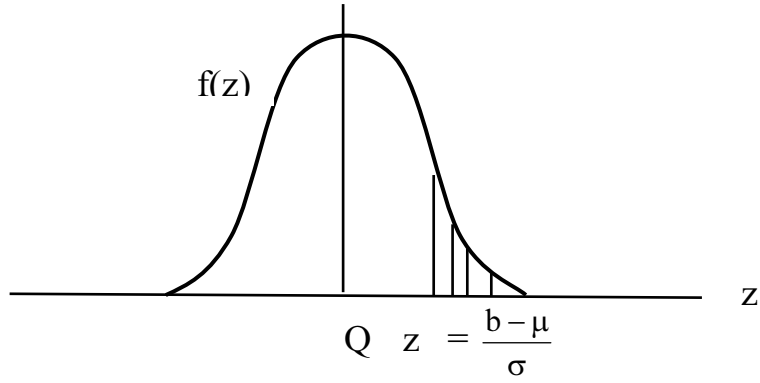
إذا كانت b قيمة معينة من قيم x فإن

$$P(x \leq b) = P(x - \mu \leq b - \mu)$$

$$= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$





الشكل 6

تحويل المتغير $N(\mu, \sigma^2)$ إلى z

المساحة غير المظلة تحت المنحنى هي

$$P(X \leq b) = P(Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma})$$

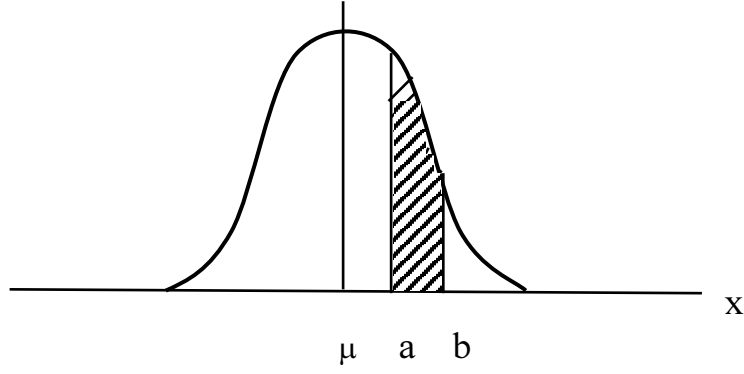
ويكون أيضا

$$\begin{aligned} P(X > b) &= 1 - P(X \leq b) \\ &= 1 - P(Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}) \end{aligned}$$

وإذا كانت $a < b$ (كما في شكل 7) فإن

$$P(a \leq X \leq b) = P(Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}) - P(Z \leq \frac{a - \mu}{\sigma})$$

أي تساوي المساحة إلى يسار b ناقص المساحة إلى يسار a



شكل 7

ومن خاصية التماثل لمنحنى دالة كثافة الاحتمال حول الصفر نجد أن

$$\begin{aligned} \text{i) } \int_{-\infty}^x f(z) dz &= \int_{-\infty}^0 f(z) dz + \int_0^x f(z) dz \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^x f(z) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \int_{-\infty}^{-x} f(z) dz &= \int_x^{\infty} f(z) dz \\ &= \frac{1}{2} - \int_0^x f(z) dz \end{aligned}$$

ولذلك يكتفي في الجداول المحسوبة لقيم المساحات أو الاحتمالات تحت المنحنى الطبيعي المعياري بحساب الاحتمالات المختلفة لقيم x الموجبه ومنها يمكن استنتاج الاحتمالات لقيم x السالبة.

أمثلة :

مثال 1:

إذا كانت X متغير عشوائي طبيعي له التوزيع $N(3, 4)$ فما هو احتمال أن تقع X بين القيمتين 3 ، 5؟

الحل:

نحول التوزيع إلى توزيع معياري

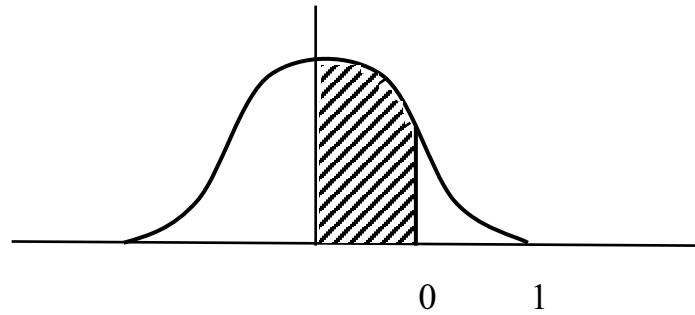
$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z_1 = \frac{3 - 3}{2} = 0$$

$$z_2 = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

$$p(3 < x < 5) = p(0 < z < 1)$$

وتساوي المساحة بين $z = 0$ و $z = 1$ وهي كما في الشكل التالي



وهي من الجدول 2 بالملحق تساوي 0.3413

مثال 2:

إذا كان المغير العشوائي X له التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$

أوجد :

- i) $P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma)$
- ii) $P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma)$
- iii) $P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma)$

الحل:

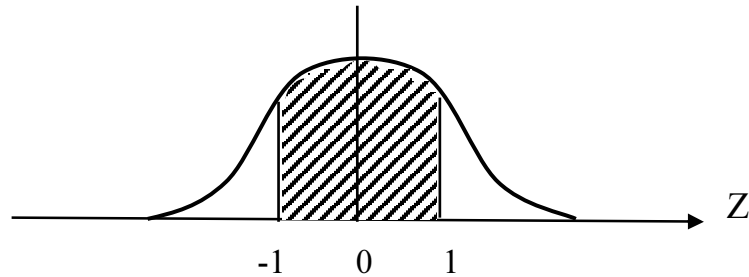
$$i) \quad z_1 = \frac{(\mu - \sigma) - \mu}{\sigma} = -1$$

$$z_2 = \frac{(\mu + \sigma) - \mu}{\sigma} = 1$$

$$\therefore P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = P(-1 < z < 1)$$

وهو عبارة عن المساحة بين $z = -1$ و $z = 1$

= المساحة بين $z = 1$ و $z = 0$ + المساحة بين $z = 0$ و $z = -1$



ونتيجة لتمثل المنحنى على يمين ويسار الوسط الحسابي $\mu = 0$ فإن

المساحة بين $z = -1$ و $z = 0$ تساوي المساحة بين $z = 0$ و $z = 1$ كما

في الشكل أعلاه وتساوي من الجدول 0.3413

$$\begin{aligned}\therefore P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) &= 0.3413 + 0.3413 \\ &= 0.6826 \\ &= 68.26 \%\end{aligned}$$

وهذا يعني أن 68.26% من مجموع المساحة تحت المنحنى تقع ضمن انحراف معياري واحد عن الوسط الحسابي.

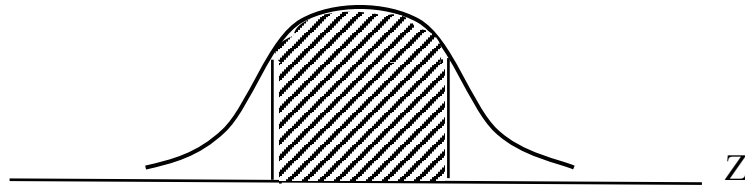
$$\begin{aligned}\text{ii)} \quad P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) \\ z_1 = \frac{(\mu - 2\sigma) - \mu}{\sigma} = -2 \\ z_2 = \frac{(\mu + 2\sigma) - \mu}{\sigma} = 2\end{aligned}$$

$$\therefore P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = P(-2 < z < 2)$$

وتساوي المساحة المحصورة بين $z = -2$ و $z = 0$ + المساحة المحصورة بين $z = 0$ و $z = 2$ ومن الجدول

$$\begin{aligned}&= 0.4773 + 0.4773 \\ &= 0.9546 \\ &= 95.46 \%\end{aligned}$$

أي أن 95.46% من مجموع المساحة تحت المنحنى تقع ضمن انحرافين معياريين من الوسط الحسابي صفر .



$$\text{iii)} \quad z_1 = \frac{(\mu - 3\sigma) - \mu}{\sigma} = -3$$

$$z_2 = \frac{(\mu + 3\sigma) - \mu}{\sigma} = 3$$

$$\therefore P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = P(-3 < z < 3)$$

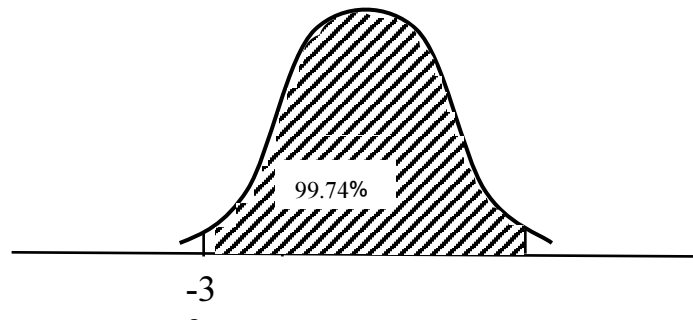
وتساوي المساحة المحصورة بين $z = -3$ و $z = 0$ + المساحة المحصورة بين $z = 0$ و $z = 3$ ومن الجدول:

$$= 0.4987 + 0.4987$$

$$= 0.9974$$

$$= 99.74\%$$

أي أن 99.74% من مجموع المساحة تحت المنحنى تقع ضمن 3 انحرافات معيارية عن الوسط الحسابي .



تمارين الفصل الخامس

التوزيع الطبيعي

1. من التوزيع الطبيعي المعياري أوجد الاحتمالات التالية:

$$(0.2580) \quad P(0 < z < 0.7) \quad (i)$$

$$(0.3849) \quad P(0 < z < 1.2) \quad (ii)$$

$$P(-1 < z < 0) \quad (iii)$$

$$(0.3413)$$

$$P(-0.82 < z < 0.96) \quad (iv)$$

$$(0.6254)$$

$$(0.2742) \quad P(z < 0.6-) \quad (v)$$

$$(0.8643) \quad P(z > -1.1) \quad (vi)$$

2. أوجد المساحة تحت $z = -0.5$

3. إذا كان المتغير العشوائي x له التوزيع الطبيعي $N(2, 1)$ أوجد :

$$(0.0227) \quad P(x > 4) \quad (i)$$

$$(0.4773) \quad P(0 < x < 2) \quad (ii)$$

4. إذا كانت أطوال طلاب إحدى الجامعات موزعه طبيعيا ولها

التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي 68.50 بوصه وانحرافه

المعياري 2.3 بوصه:

- (i) ما هو احتمال ان طول أي طالب من الجامعة يزيد عن 6 أقدام (72 بوصة) (0.0643).
- (ii) ما هي نسبة الطلبة في الجامعة الذين تتراوح أطوالهم بين 70 و 72 بوصة (0.1935)

5. إذا كانت أطوال 3000 طالب تتخذ شكل التوزيع الطبيعي وكان الوسط الحسابي لهذه الأطوال يساوي 170سم والانحراف المعياري لها يساوي 5سم :

- (i) أوجد نسبة الطلبة الذين أطوالهم أكثر من 185سم.
- (ii) أوجد عدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 185سم.
- (iii) إذا كانت نسبة الطلبة الذين أطوالهم فوق المتوسط وأقل من طول معين وليكن x هو 0.2881 فما هو هذا الطول؟.

6. إذا كان المتغير العشوائي x له التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي 80 وانحرافه المعياري 0.30 فأوجد:

- (i) $P(X \leq 80.36)$
- (ii) العدد C إذا كان $P(X \leq C) = 0.95$

7. مصنع ينتج نوعا من الأبر مفروض أن يكون قطر كل منها $\frac{1}{4}$ سم وبالخبره وجد أن أقطار الأبر من انتاج هذا المصنع لها توزيع طبيعي وسطه الحسابي 2.5مم وانحرافه المعياري 0.0025مم ،

فما هي النسبة المئوية للأبر التي يتراوح قطرها بين 2.4951 و 2.5049مم؟

8. إذا كان متوسط أجر العامل 4 دنانير في الساعة بانحراف معياري 0.50 دينار وإذا كانت الأجور تتبع توزيعاً طبيعياً فما هي نسبة العمال الذين يتقاضون أجراً ما بين 2.5 و 3 دنانير في الساعة؟

9. إذا كان متوسط عمر المصباح الكهربائي 1500 ساعة بانحراف معياري 50 ساعة ويتبع توزيعاً طبيعياً فما هو احتمال :

- (i) أن مصباحاً سيحترق قبل 1400 ساعة.
- (ii) أن مصباحاً سيعيش أكثر من 1550 ساعة.
- (iii) أن مصباحاً سيعيش ما بين 1450 و 1550 ساعة.

10. صندوق من التفاح وزن التفاحه منه يساوي 10 أونس (OUNCES) بانحراف معياري 1.5 أونس وأوزان التفاح موزعه طبيعياً فما هي نسبة التفاحات التي يقع وزنها بين 7.9 و 12.4 أونس؟

11. إذا كانت نفقات إحدى الشركات في السنة لها التوزيع الطبيعي الذي وسطه 100 مليون دينار وانحرافه المعياري 5 ملايين دينار :

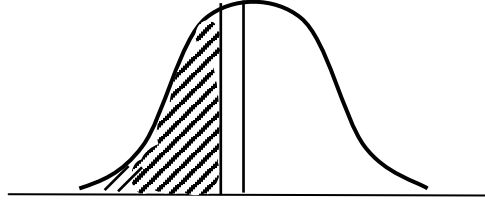
- (i) ما هو احتمال أن نفقات الشركة ستزيد عن 100 مليون دينار.
- (ii) ما هو احتمال أن نفقات الشركة ستقل عن 100 مليون دينار.

(iii) ما هو احتمال ان نفقات الشركة ستكون بين 100 و 110 مليون دينار.

حل تمارين الفصل الخامس

(التوزيع الطبيعي)

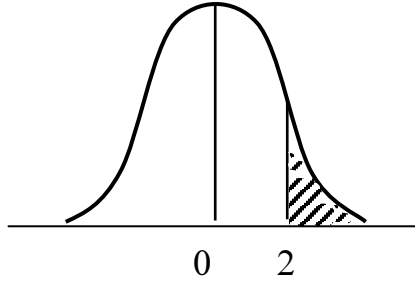
1. نجد الاحتمالات المطلوبة من الجدول 2 بالملحق مباشرة.



2. المساحة المطلوبة هي المساحة المظللة في الشكل والمحصورة بين $-\infty$ و -0.5 وهي تماثل المساحة من 0.5 حتى ∞ ناقص المساحة من صفر حتى 0.5 ومن الجدول = $0.5 - 0.1915 = 0.3085$

3. نحول التوزيع الطبيعي إلى توزيع معياري

$$z = \frac{z - \mu}{\sigma} \quad (i)$$



$$z = \frac{4 - 2}{1} = 2$$

$$\therefore P(X > 4) = P(z > 2)$$

$$= 0.5 - 0.4773$$

$$= 0.0227$$

$$Z \quad -0.5$$

$$Z_1 = \frac{0 - 2}{1} = -2 \quad (ii)$$

$$Z_2 = \frac{2 - 2}{1} = 0$$

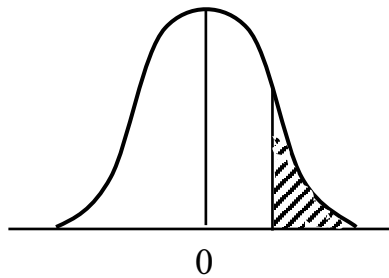
$$\begin{aligned} \therefore P(0 < X < 2) &= P(z > 2) = P(-2 < z < 0) \\ &= P(0 < z < 2) \end{aligned}$$

=

$$0.4773$$

.4

.i



$$\begin{aligned} Z &= \frac{x - \mu}{\sigma} \\ &= \frac{72 - 68.5}{2.3} = \frac{3.5}{2.5} \end{aligned}$$

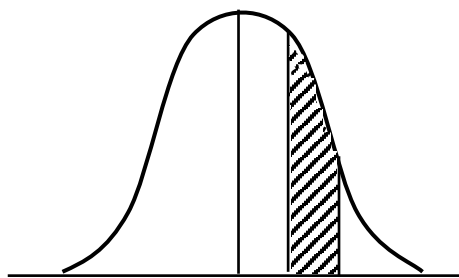
$$= 1.52$$

$$\therefore p(x > 72) = p(z > 1.52)$$

$$= 0.5 - 0.4357$$

$$= 0.0643$$

.ii



$$z_1 = \frac{70 - 68.5}{2.3} = 0.65$$

$$z_2 = \frac{72 - 68.5}{2.3} = 1.52$$

$$\therefore P(70 < x < 72) = P(0.65 < z < 1.52)$$

$$= 0.4357 - 0.2422$$

$$= 0.1935$$

.i .5

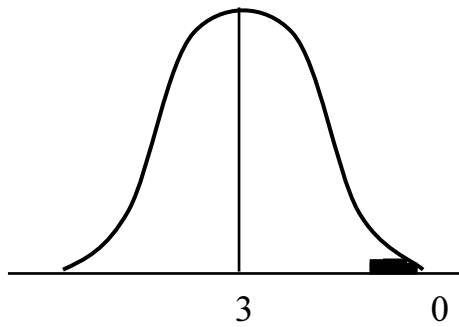
$$z = \frac{185 - 170}{5} = 3$$

$$\therefore P(x > 185) = P(z > 3)$$

$$= 0.5 - 0.4987$$

$$= 0.0013$$

.ii



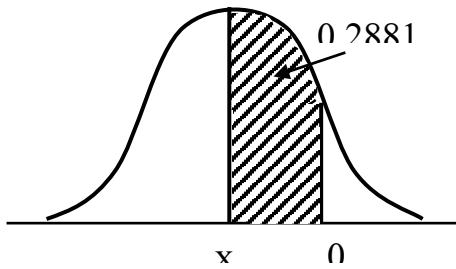
$$3000 = \% 100$$

$$x = \% 0.13$$

$$x = \frac{(0.0013)(3000)}{0.100}$$

$$= 3.9 \cong 4$$

.iii



$$z = \frac{x - 170}{5}$$

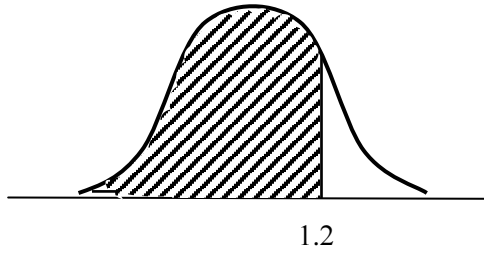
ومن الجدول ان قيمة z المناظرة

للمساحة 0.2881 هي 0.8

$$\therefore 0.8 = \frac{x - 170}{5}$$

$$x = 174$$

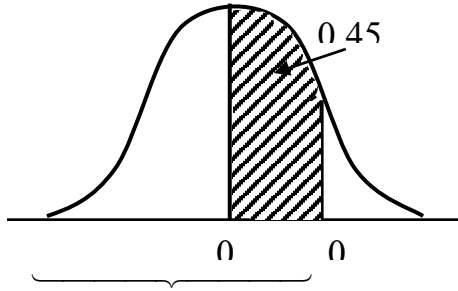
.i .6



$$Z = \frac{80.36 - 80}{0.3} = 1.2$$

$$\begin{aligned} \therefore p(x \leq 80.36) &= p(z \leq 1.2) \\ &= 0.5 + 0.3849 \\ &= 0.8849 \end{aligned}$$

.ii



كامل هذه المساحة = 0.95

أخذنا المساحة تحت 0.45 لأن الجدول معطاة
من الصفر حتى ∞ وليس من $-\infty$ حتى ∞

$$z = \frac{c - 80}{0.3}$$

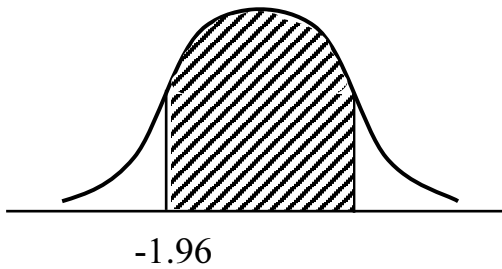
من الجدول نجد أن قيمة z
المقابلة للمساحة (0.50 -
0.95) أي للمساحة 0.45 هي

1.64

$$\therefore \frac{c - 80}{0.3} = 1.64$$

$$\therefore c = 80.492$$

.7



$$z_1 = \frac{2.4951 - 2.5}{0.0025} = -1.96$$

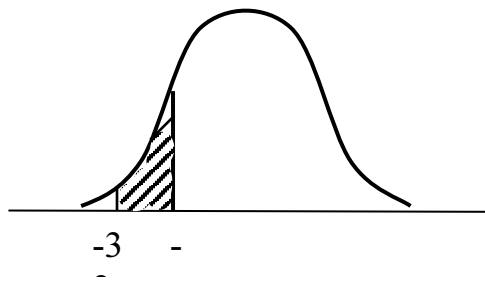
$$z_2 = \frac{2.5049 - 2.5}{0.0025} = 1.96$$

$$\begin{aligned} \therefore P(2.4951 < x < 2.5049) &= P \\ &(-1.96 < z < 1.96) \end{aligned}$$

$$= 2(0.4750)$$

$$= 0.95$$

.8



$$z_1 = \frac{2.5 - 4}{0.5} = -3$$

$$z_2 = \frac{3 - 4}{0.5} = -2$$

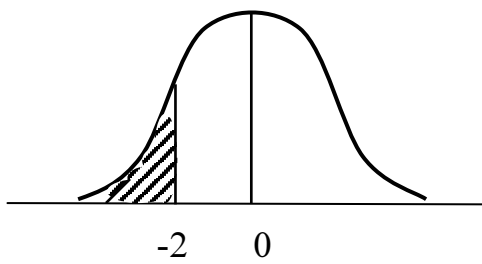
$$\therefore p(2.5 < x < 3) = p(-3 < z < -2)$$

$$= p(2 < z < 3)$$

$$= 0.4987 - 0.4773$$

$$= 0.0214$$

.i .9



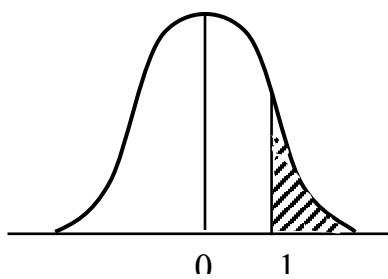
$$z = \frac{1400 - 1500}{50} = -2$$

$$\therefore p(x < 1400) = p(z < -2)$$

$$= 0.5 - 0.4773$$

$$= 0.0227$$

.ii



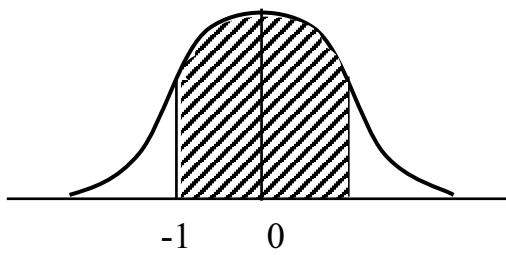
$$z = \frac{1550 - 1500}{50} = 1$$

$$\therefore p(x > 1550) = p(z > 1)$$

$$= 0.5 - 0.3413$$

$$= 0.1587$$

.iii



$$z_1 = \frac{1450 - 1500}{50} = -1$$

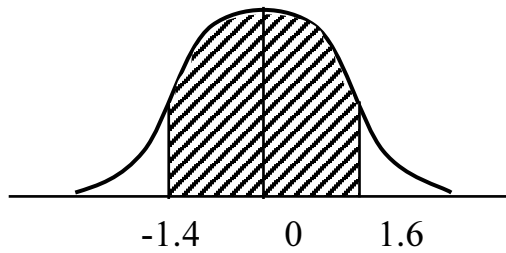
$$z_2 = \frac{1550 - 1500}{50} = 1$$

$$\therefore p(1450 < x < 1550) = p(-1 < z < 1)$$

$$= 2(0.3413)$$

$$= 0.6826$$

.10



$$z_1 = \frac{7.9 - 10}{1.5} = -1.4$$

$$z_2 = \frac{12.4 - 10}{1.5} = 1.6$$

$$\therefore p(7.9 < x < 12.4) = p(-1.4 < z < 1.6)$$

$$= 0.4192 + 0.4452$$

$$= 0.8644$$

.11

.i

$$z = \frac{100 - 100}{5} = 0$$

$$p(x > 100) = p(z > 0) = 0.5$$

.ii

$$z = \frac{100 - 100}{5} = 0$$

$$p(x < 100) = p(z < 0) = 0.5$$

.iii

$$z_1 = \frac{100 - 100}{5} = 0$$

$$z_2 = \frac{110 - 100}{5} = 2$$

$$\therefore p(100 < x < 110) = p(0 < z <$$

2)

$$= 0.4773$$

تمارين عامة على الاحتمالات

1- لتكن التجربة العشوائية هي اختيار عائلة لها 3 أطفال وتسجيل هؤلاء الأطفال حسب الجنس وتسلسل الولادة. أحسب احتمال ان يكون للعائلة ولدين.

$$(3/8)$$

2- إذا كان A_1 ، A_2 حادثين في الفراغ العيني S وكان $P(A_1) = 0.5$ و $P(A_2) = 0.7$ و $P(A_1 A_2) = 0.3$:

(i) هل A_1 و A_2 حادثين شاملين

(لا لان مجموع احتماليهما لا يساوي واحد)

(ii) أوجد $P(A_1 \text{ أو } A_2)$ (0.9)

(iii) أوجد $P(A_2 - A_1)$ (0.2)

(iv) أوجد $P(A_1 - A_2)$

(مستحيل)

3- إذا كان A و B حادثين في الفراغ العيني S وكان $P(A) = 0.4$ و $P(B) = 0.7$ و

$P(AB) = 0.3$ احسب احتمال :

(i) وقوع أحد الحادثين A أو B (0.8)

(ii) وقوع A أو B وليس كليهما
(0.5)

(iii) عدم وقوع A (0.6)

(iv) وقوع A وعدم وقوع B (0.1)

4- القى حجرا نرد مره واحده أوجد احتمالات الحوادث التالية :

(i) A1 مجموع الرقمين الظاهرين 7 (6/36)

(ii) A2 مجموع الرقمين الظاهرين أكثر من 10 (3/36)

(iii) A3 مجموع الرقمين الظاهرين أقل من أو يساوي 5 (10/36)

(iv) A4 العدد 2 ظهر مره واحده على الأقل (11/36)

5- في نفس التمرين السابق احسب الاحتمالات الآتية:

(i) المجموع زوجي على فرض أن الحجر الأول 6 (3/6)

(ii) الحجر الثاني 6 على فرض أن مجموع زوجي (3/18)

(iii) المجموع زوجي إذا علمت أن المجموع أقل من 5 (4/6)

(iv) الحجر الثاني 6 على فرض أن الأول 4 (1/6)

(v) المجموع فردي إذا علمت أن الحجر الأول فردي (9/18)

6- يوجه صيادان بندقيتيهما معا إلى غزال فاذا كانت فرصة كل منهما في إصابة الغزال هي $\frac{1}{3}$ فأحسب احتمال إصابة الغزال .
(5/9)

7- إذا كانت A تتسخ 20% من خطابات المعهد وكانت 50% من خطاباتها بدون أخطاء بينما تتسخ B الباقي وكانت 90% من خطاباتها بدون أخطاء. فإذا سحب خطاب من خطابات المعهد فأحسب احتمال أن يكون الخطاب بدون أخطاء.
(0.82)

8- في السؤال السابق إذا كان الخطاب المسحوب خطابا فيه أخطاء فما هو احتمال أن تكون A هي التي كتبتة؟
(10/18=0.5555)

9- إذا كان احتمال نجاح الطالب في مادة الاحصاء = 0.40 كم يكون احتمال :

- (i) ان ينجح طالب واحد من بين 5 طلاب (0.2592)
- (ii) ان ينجح طالب واحد على الأقل (0.92224)
- (iii) ان ينجح 4 طلاب على الأكثر (0.98976)
- (iv) ان لا ينجح أحد (0.07776)

10- ما هو احتمال ان نحصل على مجموع 5 ثلاث مرات من رمي زهرتي نرد 6 مرات؟
(0.17342)

11- إذا كان احتمال إصابة الصاروخ للهدف 0.3 ما هو عدد الصواريخ اللازم إطلاقها كي يكون احتمال إصابة الهدف على الأقل 80%.

الحل: احتمال الخطأ = 0.7

احتمال الصواريخ تخطئ = $(0.7)^n$

المطلوب هو $1 - (0.7)^n > 0.8$

$$(0.7)^n > -0.2$$

$$(0.7)^n < 0.2$$

$$(0.7)^1 = 0.7, (0.7)^2 = 0.49$$

$$(0.7)^3 = 0.343, (0.7)^4 = 0.2401$$

$$(0.7)^5 = 0.16807$$

∴ عدد الصواريخ $n = 5$

الملاحق

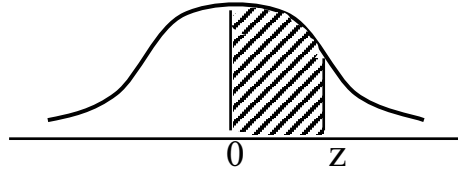
ملحق رقم (1)

قيم الدالة الأسية السالبة e^{-x}

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0.0	1.000	2.0	0.135	4.0	0.018	6.0	0.0025	8.0	0.00034
0.1	0.905	2.1	0.122	4.1	0.017	6.1	0.0022	8.1	0.00030
0.2	0.819	2.2	0.111	4.2	0.015	6.2	0.0020	8.2	0.00028
0.3	0.741	2.3	0.100	4.3	0.014	6.3	0.0018	8.3	0.00025
0.4	0.670	2.4	0.091	4.4	0.012	6.4	0.0017	8.4	0.00023
0.5	0.607	2.5	0.082	4.5	0.011	6.5	0.0015	8.5	0.00020
0.6	0.549	2.6	0.074	4.6	0.010	6.6	0.0014	8.6	0.00018
0.7	0.497	2.7	0.067	4.7	0.009	6.7	0.0012	8.7	0.00017
0.8	0.449	2.8	0.061	4.8	0.008	6.8	0.0011	8.8	0.00015
0.9	0.407	2.9	0.055	4.9	0.007	6.9	0.0010	8.9	0.00014
1.0	0.368	3.0	0.050	5.0	0.0067	7.0	0.0009	9.0	0.00012
1.1	0.333	3.1	0.045	5.1	0.0061	7.1	0.0008	9.1	0.00011
1.2	0.301	3.2	0.041	5.2	0.0055	7.2	0.0007	9.2	0.00010
1.3	0.273	3.3	0.037	5.3	0.0050	7.3	0.0007	9.3	0.00009
1.4	0.247	3.4	0.033	5.4	0.0045	7.4	0.0006	9.4	0.00008
1.5	0.223	3.5	0.030	5.5	0.0041	7.5	0.00055	9.5	0.00008
1.6	0.202	3.6	0.027	5.6	0.0037	7.6	0.00050	9.6	0.00007
1.7	0.183	3.7	0.025	5.7	0.0033	7.7	0.00045	9.7	0.00006
1.8	0.165	3.8	0.022	5.8	0.0030	7.8	0.00041	9.8	0.00006
1.9	0.150	3.9	0.020	5.9	0.0027	7.9	0.00037	9.9	0.00005

ملحق رقم (2) / المساحات تحت المنحنى الطبيعي

(A هي المساحة تحت المنحنى المحصورة بين 0 , 2)



Z	A	Z	A	Z	A	Z	A
0.00	0.0000	0.47	0.1808	0.94	0.3264	1.41	0.4207
.01	.0040	.48	.1844	.95	.3289	1.42	.4222
.02	.0080	.49	.1879	.96	.3315	1.43	.4236
.03	.0120	.50	.1915	.97	.3340	1.44	.4251
.04	.0160	.51	.1950	.98	.3365	1.45	.4265
.05	.0199	.52	.1985	.99	.3389	1.46	.4279
.06	.0239	.53	.2019	1.00	.3413	1.47	.4292
.07	.0279	.54	.2054	1.01	.3438	1.48	.4306
.08	.0319	.55	.2088	1.02	.3461	1.49	.4319
.09	.0359	.56	.2123	1.03	.3485	1.50	.4332
.10	.0398	.57	.2157	1.04	.3508	1.51	.4345
.11	.0438	.58	.2190	1.05	.3531	1.52	.4357
.12	.0478	.59	.2224	1.06	.3554	1.53	.4370
.13	.0517	.60	.2258	1.07	.3577	1.56	.4382
.14	.0557	.61	.2291	1.08	.3599	1.55	.4394
.15	.0596	.62	.2324	1.09	.3621	1.56	.4406
.16	.0636	.63	.2357	1.10	.3643	1.57	.4418
.17	.0675	.64	.2389	1.11	.3665	1.58	.4430
.18	.0714	.65	.2422	1.12	.3686	1.59	.4441
.19	.0754	.66	.2454	1.13	.3708	1.60	.4452
.20	.0793	.67	.2486	1.14	.3729	1.61	.4463
.21	.0832	.68	.2518	1.15	.3749	1.62	.4474
.22	.0871	.69	.2549	1.16	.3770	1.63	.4485
.23	.0910	.70	.2580	1.17	.3790	1.64	.4495
.24	.0948	.71	.2612	1.18	.3810	1.65	.4505
.25	.0987	.72	.2642	1.19	.3830	1.66	.4515
.26	.1026	.73	.2673	1.20	.3849	1.67	.4525
.27	.1064	.74	.2704	1.21	.3869	1.68	.4535
.28	.1103	.75	.2734	1.22	.3888	1.69	.4545
.29	.1141	.76	.2764	1.23	.3907	1.70	.4554
.30	.1179	.77	.2794	1.24	.3925	1.71	.4564
.31	.1217	.78	.2823	1.25	.3944	1.72	.4573
.32	.1255	.79	.2852	1.26	.3962	1.73	.4582
.33	.1293	.80	.2881	1.27	.3980	1.74	.4591

.34	.1331	.81	.2910	1.28	.3997	1.75	.4599
.35	.1368	.82	.2939	1.29	.4015	1.76	.4608
.36	.1406	.83	.2967	1.30	.4032	1.77	.4616
.37	.1443	.84	.2996	1.31	.4049	1.78	.4625
.38	.1480	.85	.3023	1.32	.4066	1.79	.4633
.39	.1517	.86	.3051	1.133	.4082	1.80	.4641
.40	.1554	.87	.3079	1.34	.4099	1.81	.4649
.41	.1591	.88	.3106	1.35	.4115	1.82	.4656
.42	.1628	.89	.3133	1.36	.4131	1.83	.4664
.43	.1664	.90	.3159	1.37	.4147	1.84	.4671
.44	.1700	.91	.3186	1.38	.4162	1.85	.4678
.45	.1736	.92	.3212	1.39	.4177	1.86	.4686
.46	.1772	.93	.3238	1.40	.4192	1.87	.4693

... ينبع

Z	A	Z	A	Z	A	Z	A
1.88	0.4700	2.41	0.4920	2.94	0.4984	3.47	0.4997
1.89	.4706	2.42	.4922	2.95	.4984	3.48	.4998
1.90	.4713	2.43	.4925	2.96	.4985	.49	.4998
1.91	.4719	2.44	.4927	2.97	.4985	3.50	.4998
1.92	.4726	2.45	.4929	2.98	.4986	3.51	.4998
1.93	.4732	2.46	.4931	2.99	.4986	3.52	.4998
1.94	.4738	2.47	.4932	3.00	.4987	3.53	.4998
1.95	.4744	2.48	.4934	3.1	.4987	3.54	.4998
1.96	.4750	2.49	.4936	3.2	.4987	3.55	.4998
1.97	.4756	2.50	.4938	3.3	.4988	3.56	.4998
1.98	.4762	2.51	.4940	3.4	.4988	3.57	.4998
1.99	.4767	2.52	.4941	3.5	.4989	3.58	.4998
2.00	.4773	2.53	.4943	3.6	.4989	3.59	.4998
2.01	.4778	2.54	.4945	3.7	.4989	3.60	.4999
2.02	.4783	2.55	.4946	3.8	.4990	3.61	.4999
2.03	.4788	2.56	.4948	3.9	.4990	3.62	.4999
2.04	.4793	2.57	.4949	3.10	.4990	3.63	.4999
2.05	.4798	2.58	.4951	3.11	.4991	3.64	.4999
2.06	.4803	2.59	.4952	3.12	.4991	3.65	.4999
2.07	.4808	2.60	.4953	3.13	.4991	3.66	.4999
2.08	.4812	2.61	.4955	3.14	.4992	3.67	.4999
2.09	.4817	2.62	.4956	3.15	.4992	3.68	.4999
2.10	.4821	2.63	.4957	3.16	.4992	3.69	.4999
2.11	.4826	2.64	.4959	3.17	.4992	3.70	.4999
2.12	.4830	2.65	.4960	3.18	.4993	3.71	.4999
2.13	.4834	2.66	.4961	3.19	.4993	3.72	.4999
2.14	.4838	2.67	.4962	3.20	.4993	3.73	.4999

2.15	.4842	2.68	.4963	3.21	.4993	3.74	.4999
2.16	.4846	2.69	.4964	3.22	.4994	3.75	.4999
2.17	.4850	2.70	.4965	3.23	.4994	3.76	.4999
2.18	.4854	2.71	.4966	3.24	.4994	3.77	.4999
2.19	.4857	2.72	.4967	3.25	.4994	3.78	.4999
2.20	.4861	2.73	.4968	3.26	.4994	3.79	.4999
2.21	.4865	2.74	.4969	2.27	.4995	3.80	.4999
2.22	.4868	2.75	.4970	3.28	.4995	3.81	.4999
2.23	.4871	2.76	.4971	3.29	.4995	3.82	.4999
2.24	.4875	2.77	.4972	3.30	.4995	3.83	.4999
2.25	.4878	2.78	.4973	3.31	.4995	3.84	.4999
2.26	.4881	2.79	.4974	3.32	.4996	3.85	.4999
2.27	.4884	2.80	.4974	3.33	.4996	3.86	.4999
2.28	.4887	2.81	.4975	3.34	.4996	3.87	.5000
2.29	.4890	2.82	.4976	3.35	.4996	3.88	.5000
2.30	.4893	2.83	.4977	3.36	.4996	3.89	.5000
2.31	.4896	2.84	.4977	3.37	.4996		
2.32	.4898	2.85	.4978	3.38	.4996		
2.33	.4901	2.86	.4979	3.39	.4997		
2.34	.4904	2.87	.4980	3.40	.4997		
2.35	.4906	2.88	.480	3.41	.4997		
2.36	.4909	2.89	.4981	3.42	.4997		
2.37	.4911	2.90	.4981	3.43	.4997		
2.38	.4913	2.91	.4982	3.44	.4997		
2.39	.4916	2.92	.4983	3.45	.4997		
2.40	.4918	2.93	.4983	3.46	.4997		

تمارين عامة على الاحتمالات

تمارين عامة على الاحتمالات

1- لتكن التجربة العشوائية هي اختيار عائلة لها 3 أطفال وتسجيل هؤلاء الأطفال حسب الجنس وتسلسل الولادة. أحسب احتمال ان يكون للعائلة ولدين.

$$(3/8)$$

2- إذا كان A_1 ، A_2 حادثين في الفراغ العيني S وكان $P(A_1) = 0.5$ و $P(A_2) = 0.7$ و $P(A_1 A_2) = 0.3$:

(i) هل A_1 و A_2 حادثين شاملين

(لا لان مجموع احتماليهما لا يساوي واحد)

(ii) أوجد $P(A_1 \text{ أو } A_2)$ (0.9)

(iii) أوجد $P(A_2 - A_1)$ (0.2)

(iv) أوجد $P(A_1 - A_2)$

(مستحيل)

3- إذا كان A و B حادثين في الفراغ العيني S وكان $P(A) = 0.4$ و $P(B) = 0.7$ و

$P(AB) = 0.3$ احسب احتمال :

(i) وقوع أحد الحادثين A أو B (0.8)

(ii) وقوع A أو B وليس كليهما
(0.5)

(iii) عدم وقوع A (0.6)

(iv) وقوع A وعدم وقوع B (0.1)

4- القى حجرا نرد مره واحده أوجد احتمالات الحوادث التالية :

(i) A1 مجموع الرقمين الظاهرين 7 (6/36)

(ii) A2 مجموع الرقمين الظاهرين أكثر من 10 (3/36)

(iii) A3 مجموع الرقمين الظاهرين أقل من أو يساوي 5 (10/36)

(iv) A4 العدد 2 ظهر مره واحده على الأقل (11/36)

5- في نفس التمرين السابق احسب الاحتمالات الآتية:

(i) المجموع زوجي على فرض أن الحجر الأول 6 (3/6)

(ii) الحجر الثاني 6 على فرض أن مجموع زوجي (3/18)

(iii) المجموع زوجي إذا علمت أن المجموع أقل من 5 (4/6)

(iv) الحجر الثاني 6 على فرض أن الأول 4 (1/6)

(v) المجموع فردي إذا علمت أن الحجر الأول فردي (9/18)

6- يوجه صيادان بندقيتيهما معا إلى غزال فاذا كانت فرصة كل منهما في إصابة الغزال هي $\frac{1}{3}$ فأحسب احتمال إصابة الغزال .

$$(5/9)$$

7- إذا كانت A تنسخ 20% من خطابات المعهد وكانت 50% من خطاباتنا بدون أخطاء بينما تنسخ B الباقي وكانت 90% من خطاباتنا بدون أخطاء. فإذا سحب خطاب من خطابات المعهد فأحسب احتمال أن يكون الخطاب بدون أخطاء.

$$(0.82)$$

8- في السؤال السابق إذا كان الخطاب المسحوب خطابا فيه أخطاء فما هو احتمال أن تكون A هي التي كتبتة؟

$$(10/18=0.5555)$$

9- إذا كان احتمال نجاح الطالب في مادة الاحصاء = 0.40 كم يكون احتمال :

- (i) ان ينجح طالب واحد من بين 5 طلاب (0.2592)
- (ii) ان ينجح طالب واحد على الأقل (0.92224)
- (iii) ان ينجح 4 طلاب على الأكثر (0.98976)
- (iv) ان لا ينجح أحد (0.07776)

10- ما هو احتمال ان نحصل على مجموع 5 ثلاث مرات من رمي زهرتي نرد 6 مرات؟

$$(0.17342)$$

11- إذا كان احتمال إصابة الصاروخ للهدف 0.3 ما هو عدد الصواريخ اللازم إطلاقها كي يكون احتمال إصابة الهدف على الأقل 80%.

الحل: احتمال الخطأ = 0.7

احتمال الصواريخ تخطئ = $(0.7)^n$

المطلوب هو $1 - (0.7)^n > 0.8$

$$(0.7)^n > -0.2$$

$$(0.7)^n < 0.2$$

$$(0.7)^1 = 0.7, (0.7)^2 = 0.49$$

$$(0.7)^3 = 0.343, (0.7)^4 = 0.2401$$

$$(0.7)^5 = 0.16807$$

∴ عدد الصواريخ $n = 5$